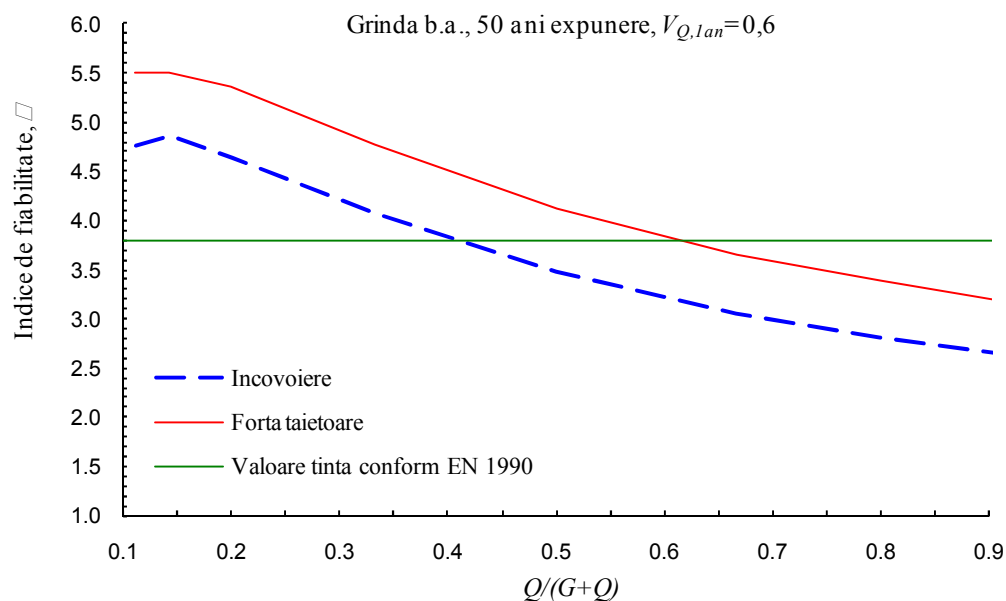




Universitatea Tehnică de Construcții București
Facultatea de Construcții Civile, Industriale și Agricole
Catedra de Construcții de Beton Armat



Siguranța structurilor la acțiuni seismice și climatice

Note de curs pentru anul I

Program master:

Proiectarea construcțiilor civile și industriale în zone seismice

Radu VĂCĂREANU

2011

CUPRINS

I. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITATILOR. VARIABILE SI PROCESE ALEATOARE	4
I.1. Introducere	4
I.1.1. Incertitudini aleatoare	5
I.1.2. Incertitudini epistemice	6
I.2. Fundamente ale modelelor de probabilitate	6
I.2.1. Scurt istoric [2]	6
I.2.2. Evenimente si probabilitate. Elemente de teoria multimilor	8
I.2.3. Operatii cu probabilitati	11
I.3. Variabile aleatoare si repartitii de probabilitate	15
I.3.1. Definitii si relatii de baza	15
I.3.2. Descriptori ai variabilelor aleatoare continue	18
I.3.3. Repartitia Poisson	20
I.3.4. Repartitia Pareto generalizata	21
I.3.5. Prelucrarea datelor statistice	24
I.4. Elemente de teoria proceselor aleatoare	28
I.4.1. Introducere	28
I.4.2. Serii Fourier si integrale Fourier	29
I.4.3. Densitatea spectrala de putere si functia de autocorelatie	31
I.4.4. Functia de inter-corelatie si inter-spectrul densitatii de putere	34
II. ANALIZA SI EVALUAREA FIABILITATII STRUCTURILOR	39
II.1. Introducere	39
II.2. Functia de fiabilitate	40
II.3. Etape ale analizei de fiabilitate	41
II.4. Problema de baza a fiabilitatii structurilor	42
II.5. Metoda de ordin I cu momente de ordin II	49
II.6. Metode avansate pentru analiza fiabilitatii structurilor in teoria FORM	52
II.6.1. Cazul variabilelor normale necorelate	52
II.6.2. Cazul variabilelor negausiene necorelate	69
II.6.3. Cazul variabilelor normale corelate	71
II.6.4. Metoda directa de simulare Monte-Carlo	73
II.7. Proiectarea bazata pe fiabilitate	74
II.7.1. Introducere	74
II.7.2. Proiectarea bazata pe fiabilitate conform <i>EN 1990 – Basis of Structural Design</i>	75
II.7.3. Calibrarea coeficientilor partiali de siguranta conform <i>EN 1990 – Basis of Structural Design</i>	82
II.7.4. Gruparea efectelor sectionale ale incarcarilor conform <i>CR0-2005 – Bazele proiectarii structurilor in constructii</i>	87
III. EVALUAREA ACȚIUNII ȘI A EFECTELOR VÂNTULUI PE CONSTRUCȚII	94
III.1. Circulația aerului. Stratul limită atmosferic	94
III.1.1. Introducere	94
III.1.2. Circulația atmosferică	95
III.1.3. Pierderi produse de vânt	102
III.2. Viteza vântului. Presiunea dinamică a vântului	104
III.2.1. Elemente generale	104
III.2.2. Valori de referință ale vitezei și presiunii dinamice a vântului	104
III.2.3. Zonarea acțiunii vântului în România	106

III.2.4.	Rugozitatea terenului. Valori medii ale vitezei și presiunii dinamice a vântului	111
III.2.5.	Turbulența vântului. Valori de vârf ale vitezei și presiunii dinamice a vântului	120
III.3.	Acțiunea vântului asupra clădirilor și structurilor	126
III.3.1.	Elemente generale	126
III.3.2.	Presiunea vântului pe suprafețe	127
III.3.3.	Forțe din vânt.....	130
III.4.	Coeficienți aerodinamici de forță și de presiune.....	135
III.5.	Coeficientul de răspuns dinamic	139
III.5.1.	Turbulența vântului	139
III.5.2.	Răspunsul structural dinamic	142
III.5.3.	Procedura de determinare a coeficientului de răspuns dinamic.....	144
III.5.4.	Deplasări și accelerații corespunzătoare stării limită de serviciu a construcției	155
III.6.	Fenomene aeroelastice	159
III.6.1.	Fenomene de instabilitate aeroelastică generate de vârtejuri	159
III.6.2.	Alte fenomene aeroleastice	165
IV.	EVALUAREA HAZARDULUI SEISMIC	169
IV.1.	Definiii	169
IV.2.	Analiza determinista a hazardului seismic.....	169
IV.3.	Analiza probabilistica a hazardului seismic.....	171
IV.3.1.	Considerarea incertitudinilor referitoare la pozitia cutremurului	172
IV.3.2.	Considerarea incertitudinilor referitoare la marimea cutremurului	176
IV.3.3.	Considerarea incertitudinilor din relatiile de atenuare	185
IV.3.4.	Determinarea curbelor de hazard seismic pe amplasament	187

I. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITATILOR. VARIABLE SI PROCESE ALEATOARE

I.1. Introducere

Teoria probabilitatilor furnizeaza un model matematic pentru descrierea si interpretarea fenomenelor ce au regularitate statistica. Teoria probabilitatilor permite modelarea si cuantificarea incertitudinilor ce apar in modelele de calcul folosite in ingineria civila. In functie de sursele acestora, incertitudinile se clasifica in doua categorii:

- incertitudini de tip aleator, care sunt asociate cu caracterul aleator natural al informatiei observate, Figura I.1; aceste incertitudini nu pot fi reduse sau modificate, deoarece sunt o parte a lumii reale (a realitatii obiective); incertitudinile aleatoare conduc la o probabilitate de cedare sau la un risc calculat;
- incertitudini de tip epistemic, care sunt asociate cu impreciziile (inexactitatile) in predictia si estimarea realitatii, Figura I.2; aceste incertitudini pot fi reduse prin aplicarea unor modele de predictie mai bune si/sau prin experimente imbunatatite; incertitudinile epistemice conduc la o variabilitate a probabilitatii de cedare evaluate cu considerarea incertitudinilor aleatoare.

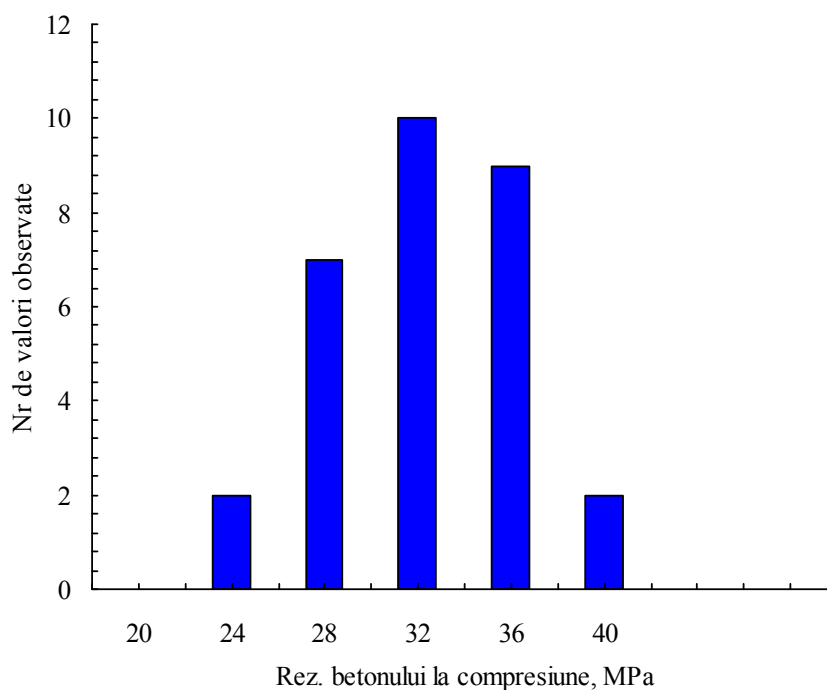


Figura I.1. Exemplu de incertitudine aleatoare

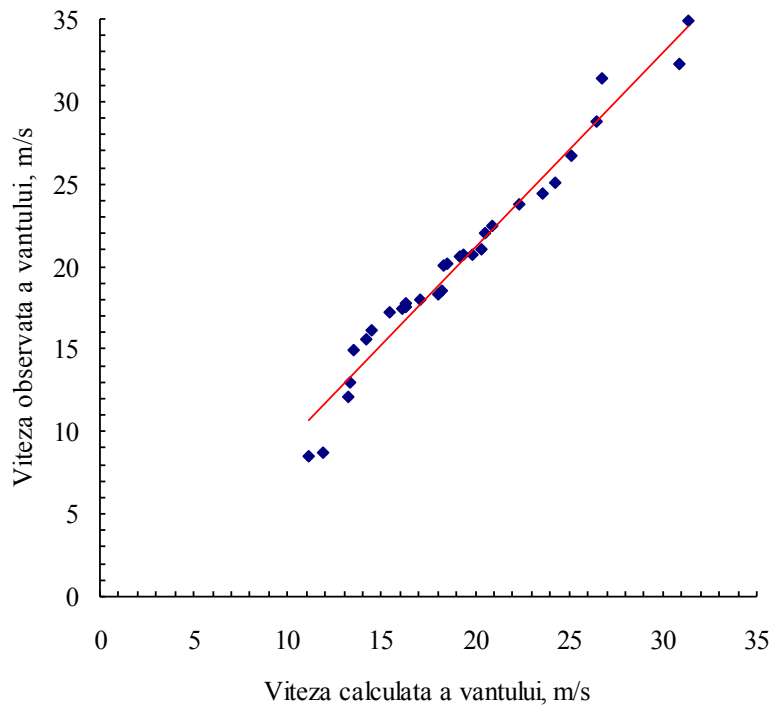


Figura I.2. Exemplu de incertitudine epistematica

Indiferent de tipul de incertitudine, teoria probabilitatilor si statistica matematica ofera instrumentele adecvate pentru modelare si analiza. Rolul teoriei probabilitatilor si a statisticii in ingineria civila este foarte cuprinzator, de la descrierea informatiei de baza la dezvoltarea si formularea bazelor proiectarii si luarii deciziilor.

I.1.1. Incertitudini aleatoare

Pentru multe fenomene si procese din ingineria civila rezultatele asteptate in urma efectuarii unei observatii nu pot fi prezise cu suficienta acuratete. Astfel de fenomene si procese sunt caracterizate de date experimentale (de observatie) ce contin o variabilitate semnificativa ce reprezinta caracterul aleator natural al fenomenului de baza; valorile observate in urma masuratorilor sunt diferite de la un experiment la altul, chiar daca experimentele/masuratorile sunt efectuate in conditii identice (cu un anumit grad de aproximatie). In urma efectuarii observatiilor se obtine un interval de valori masurate sau observate. Dat fiind setul finit de date de observatie (esantionul), se pot estima media esantionului si dispersia acestuia. Deoarece media esantionului este estimata folosind un numar limitat de observatii, exista o incertitudine epistematica pentru media estimata, numita eroare de esantionare si determinata ca raport intre abaterea standard a esantionului si radacina patrata a numarului de observatii din esantion.

I.1.2. Incertitudini epistemice

Modelele idealizate ale obiectelor si proceselor reale folosite in inginerie sunt reprezentari imperfecte ale realitatii; in consecinta, rezultatele analizei modelelor idealizate sunt estimari sau predictii imprecise ale realitatii, continand incertitudini. Este rezonabil sa se presupuna ca rezultatele analizei reprezinta valori centrale ale cantitatilor analizate [1].

De exemplu, sa consideram cazul unei grinzi simplu rezemate incarcate cu o incarcare uniform distribuita. Deplasarea maxima pe directie verticala a unui punct ce corespunde mijlocului deschiderii grinzii se determina cu relatia:

$$\delta = \frac{ql^4}{384EI} \quad (I.1)$$

unde q este incarcarea uniform distribuita, l este deschiderea grinzii, E este modulul de elasticitate al materialului din care este alcatuita grinda si I este momentul de inertie al sectiunii grinzii. Relatia (I.1) se bazeaza pe urmatoarele ipoteze:

- (i) materialul se comporta liniar si elastic;
- (ii) sectiunile plane si normale la axa grinzii inainte de deformatie raman plane si normale la axa grinzii dupa deformatie (ipoteza lui Bernoulli);
- (iii) se neglijeaza deformatiile produse de forta taietoare.

Deoarece ipotezele (i)...(iii) pot fi doar pariale valabile, valoarea calculata cu relatia (I.1) reprezinta o valoare medie si va contine incertitudini epistemice. Pentru a estima influenta incertitudinii epistemice se pot incerca, in conditii identice, grinzi confectionate din acelasi material, pentru valori foarte precis masurate ale marimilor q , l , E si I . Raportand valorile masurate la valoarea calculata se obtine un interval de valori in jurul unitatii. Prelucrând statistic valorile rapoartelor se obtin media si abaterea standard a erorii introduse de incertitudinile epistemice. Valoarea medie a acestui raport poate fi considerata ca un factor de influenta cu care se poate corecta valoarea calculata cu relatia (I.1).

I.2. Fundamente ale modelelor de probabilitate

I.2.1. Scurt istoric [2]

Se poate considera ca inceputul teoriei probabilitatilor este in secolul XVII, intr-o serie de scrisori din anul 1654 intre Blaise Pascal (1623-1662) si Pierre de Fermat (1601-1665), in care au

rezolvat problema partidei neterminate, problema legata de jocurile de noroc si ridicata lui Pascal de catre Antoine Gombaud (Cavaler de Méré). Problema partidei neterminate cere determinarea impartirii potului atunci cand un joc cu mai multe runde trebuie abandonat inainte sa se fi terminat. In continuare se prezinta o versiune a problemei ce este simplificata fata de cea considerata de Pascal si Fermat in corespondenta. Astfel, doi jucatori pariaza sume egale pe obtinerea unui numar mai mare de victorii la aruncarea de cinci ori a unei monede nemasluite (corecte). Acestia incep jocul, dar trebuie sa il abandoneze inainte ca vreunul din ei sa fi castigat. Daca fiecare a castigat cate o aruncare si jocul este abandonat dupa doua aruncari, sau daca fiecare a castigat cate doua aruncari si jocul este abandonat dupa patru aruncari, atunci impart potul in mod egal. Dar ce se intampla daca se opresc dupa trei aruncari, un jucator castigand doua runde?

Anterior corespondentei dintre Pascal si Fermat, Girolamo Cardano (1501-1576), in cartea *Liber de ludo aleae* (*Cartea jocurilor de noroc*), publica primul studiu stiintific privind aruncarea zarurilor, bazat pe ipoteza ca exista niste principii fundamentale care guverneaza probabilitatea de a obtine anumite rezultate. Matematica creata de Pascal si Fermat, ce parea nefunctionala in haosul si imprevizibilitatea vietii cotidiene, a primit un impuls substantial prin publicarea de catre John Graunt (1620-1674) a cartii *Observatii naturale si politice bazate pe anunturi mortuare*. In lucrare, Graunt analizeaza si organizeaza registrele deceselor din Londra din perioada anilor 1660 pentru a crea un sistem de semnalare a declansarii si raspandirii ciumei in Londra. Aceasta brosură poate fi considerata ca piatra de temelie a statisticii moderne. Tehnicile elaborate si folosite de Graunt in lucrare au facut posibila aplicarea teoriei elaborate de catre Pascal si Fermat, initial pentru jocurile de noroc, in viata cotidiana. Pentru prima data omenirea avea un mijloc de a face predictii asupra viitorului si de a-l controla prin decizii bazate pe analiza riscurilor.

In anul 1657, Christiaan Huygens (1629-1695) scrie *De ratiociniis in ludo aleae* (*Despre calculele din jocurile de noroc*), prima lucrare veritabila de teoria probabilitatilor in sens modern. In aceasta lucrare, Huygens stabileste regulile fundamentale ale calculului probabilitatilor, pornind de la axiomele teoriei probabilitatilor. De asemenea, Huygens introduce notiunea de speranta (sau castig sperat, ce se calculeaza inmultind probabilitatea fiecui deznodamant cu suma care urmeaza sa fie castigata, sau pierduta – ceea ce este considerat un castig negativ – si adunand toate rezultatele) si foloseste tabelele lui Graunt pentru a calcula speranta de viata.

Jakob Bernoulli (1654-1705) a adus o contributie matematica semnificativa prin enuntarea “legii numerelor mari”, o consecinta importanta a teoriei probabilitatilor. Aceasta lege da formularea matematica a faptului ca frecventa relativa a unui eveniment va prezice probabilitatea aparitiei sale cu atat mai exact cu cat numarul de observatii din care se calculeaza frecventa relativa este mai mare. De asemenea, Bernoulli a demonstrat ca, alegand un esantion suficient de mare, putem creste pana la orice nivel dorit increderea ca probabilitatea calculata pentru esantion este egala cu probabilitatea adevarata.

Abraham de Moivre (1667-1754) a aratat ca un ansamblu de observatii aleatoare se distribuie in jurul unei valori medii (astazi poarta numele de distributie normala). Reprezentata grafic, curba

rezultanta (rezultatele observatiilor vs. frecventa observatiilor) are forma unui clopot. Aceasta arata ca majoritatea rezultatelor observatiilor sunt grupate in jurul valorii medii. Fata de medie curba coboara simetric. La inceputul secolului XIX, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) a remarcat ca reprezentarea grafica a unui sir de rezultate obtinute prin masurarea repetata a unei aceleasi marimi produce o curba ce semana izbitor cu clopotul lui de Moivre. Gauss a considerat curba clopot o consecinta a erorilor de masurare inevitabile si a folosit repartitia (distributia) normala ca baza pentru estimarea probabilitatilor evenimentelor (rezultatelor observatiilor).

Pe drumul de la rezolvarea problemei partidei neterminate la gestionarea riscurilor, pasul matematic final a fost facut de Thomas Bayes (1702-1761) prin gasirea unei formule matematice ingenioase si extrem de puternice ce ofera o metoda de a corecta o probabilitate in lumina unor noi informatii. Astfel, daca exista o estimare a probabilitatii anterioare de producere a unui eveniment si daca apar informatii noi (suplimentare), se poate obtine o probabilitate posterioara mai exacta de producere a acelui eveniment. Aplicarea in mod repetat a formulei lui Bayes, de fiecare data cand se obtin noi informatii, permite corectarea unei probabilitati anterioare putin fiabile astfel incat, in final, se obtine o probabilitate posterioara foarte fiabila.

I.2.2. Evenimente si probabilitate. Elemente de teoria multimilor

Cuvantul probabilitate deriva din cuvintele *probare* (a dovedi sau a testa, lat.) si *ilis* (capacitate, lat.) si poate fi tradus prin “capacitatea de a fi verificat” sau “capacitatea de a fi crezut” [2]. Probabilitatea, definita ca frecventa de aparitie, este o masura numerica a sansei de producere a unui eveniment dintr-o multime exhaustiva de evenimente posibile. Probabilitatea subiectiva (epistematica) este o masura numerica a adevarului in cunoasterea unui eveniment.

Primul pas in definirea probabilitatilor este identificarea spatiului posibilitatilor - multimea tuturor evenimentelor posibile ce se pot produce in urma efectuarii unei observatii. In cel de al doilea pas se asociaza probabilitati evenimentelor specifice din spatiul particular al posibilitatilor. Fiecare problema se defineste in raport cu un spatiu al evenimentelor posibile (ce contine cel putin doua rezultate posibile) si fiecare eveniment este compus din cel putin un rezultat din spatiul posibilitatilor. De exemplu, la aruncarea unui zar, spatiul posibilitatilor este compus din aparitia unei fete cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte (6 posibilitati). In acest spatiu al posibilitatilor se pot defini evenimente ca: aparitia fetei cu un punct (cu doua puncte, cu trei puncte, ..., cu sase puncte), aparitia unei fete cu numar par de puncte, aparitia unei fete cu un numar de puncte mai mare ca patru, s.a.m.d. Probabilitatea aparitiei fetei cu un punct (cu doua puncte, ..., cu sase puncte) este egala cu $1/6$.

In continuare se dau cateva definitii din teoria multimilor [3]:

- spatiul realizarilor este multimea tuturor posibilitatilor intr-o problema probabilistica; acesta poate fi discret sau continuu, finit sau infinit;
- un punct in spatiul realizarilor reprezinta orice posibilitate individuala;
- un eveniment este o submultime a spatiului realizarilor; un eveniment (care este diferit de evenimentul imposibil) contine unul sau mai multe puncte si realizarea acestor puncte constituie producerea evenimentului corespunzator;
- evenimentul imposibil, Φ este evenimentul ce nu contine nici un punct din spatiul realizarilor;
- evenimentul sigur, S este evenimentul ce contine toate punctele din spatiul realizarilor;
- evenimentul complementar lui E , $\bar{E}$ este evenimentul ce contine toate punctele din S ce nu sunt continute in E , Figura I.3.

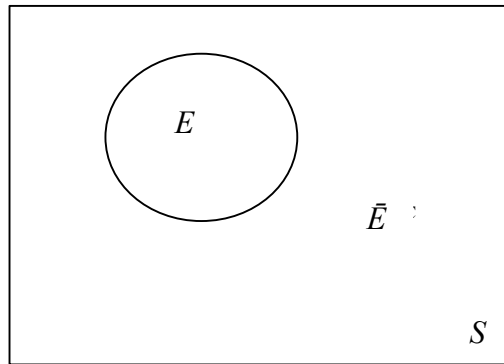


Figura I.3. Diagrama Venn reprezentand spatiul realizarilor, S si evenimentele E and $\bar{E}$

Evenimentele pot fi combinate reuniune si intersectie. Reuniunea evenimentelor E_1 si E_2 produce evenimentul $E_1 \cup E_2$ ce consta din producerea lui E_1 sau a lui E_2 sau a amandorura; evenimentul $E_1 \cup E_2$ contine toate punctele ce apartin fie lui E_1 fie lui E_2 , Figura I.4. Intersectia evenimentelor E_1 si E_2 produce evenimentul $E_1 \cap E_2$ ce consta din producerea evenimentelor E_1 si E_2 impreuna; evenimentul $E_1 \cap E_2$ (sau $E_1 E_2$) contine o submultime de puncte ce apartin atat lui E_1 cat si lui E_2 , Figura I.4.

Doua evenimente sunt disjuncte (sau reciproc exclusive) daca producerea unuia face imposibila producerea celuilalt eveniment; producerea ambelor evenimente este imposibila (intersectia lor este evenimentul imposibil, Φ).

Mai multe evenimente formeaza o multime completa (sau sunt colectiv exhaustive) daca reuniunea lor este spatiul realizarilor (de ex., $E \cup \bar{E} = S$). Doua multimi sunt egale daca si numai daca acestea contin exact aceleasi puncte. Daca se considera evenimentul A , exista urmatoarele consecinte [3]:

$$- A \cup \Phi = A \quad (I.2)$$

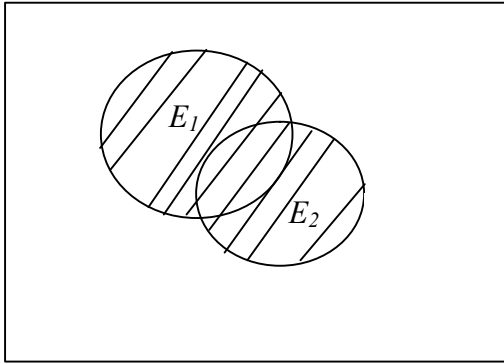
$$- A \cap \Phi = \Phi \quad (I.3)$$

$$- A \cup A = A \quad (I.4)$$

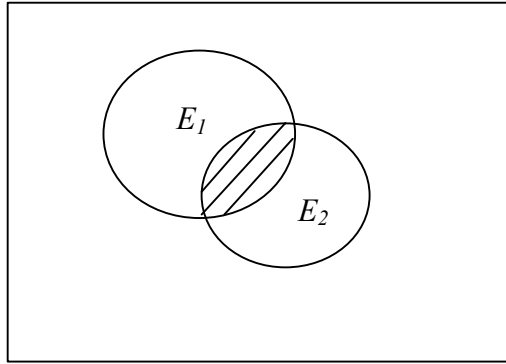
$$- A \cap A = A \quad (I.5)$$

$$- A \cup S = S \quad (I.6)$$

$$- A \cap S = A \quad (I.7).$$



Reuniunea $E_1 \cup E_2$



Intersectia $E_1 \cap E_2$

Figura I.4. Diagrame Venn ce reprezinta reuniunea si intersectia a doua evenimente E_1 si E_2 in spatiul realizarilor S

Doua multimi complementare au urmatoarele proprietati:

$$- E \cup \bar{E} = S \quad (I.8)$$

$$- E \cap \bar{E} = \Phi \quad (I.9)$$

$$- \overline{\bar{E}} = E \quad (I.10).$$

De asemenea, operatiile cu multimi au urmatoarele proprietati [3]:

$$- \text{comutativitate: } - A \cup B = B \cup A \quad (I.11)$$

$$- A \cap B = B \cap A \quad (I.12)$$

$$- \text{asociativitate: } - (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (I.13)$$

$$- (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (I.14)$$

$$- \text{distributivitate: } - (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (I.15)$$

$$- (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (I.16),$$

unde A, B si C sunt trei multimi (sau evenimente).

Conform regulii lui De Morgan, pentru doua multimi (sau evenimente) E_1 si E_2 avem relatia [3]:

$$- \overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \quad (\text{I.17}).$$

I.2.3. Operatii cu probabilitati

I.2.3.1. Axiome

Se postuleaza existenta unui numar $P(E)$ care reprezinta probabilitatea evenimentului E intr-un experiment aleator. Operatiile cu probabilitati se bazeaza pe urmatoarele axiome[3]:

Axioma 1: Pentru orice eveniment E din S exista $P(E) \geq 0$ (I.18).

Axioma 2: Probabilitatea evenimentului sigur S este $P(S) = 1$ (I.19).

Axioma 3: Daca doua evenimente E_1 si E_2 sunt reciproc exclusive, atunci:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad (\text{I.20}).$$

Din axiomele 1 si 2 rezulta ca: $0 \leq P(E) \leq 1$ (I.21).

Daca spatiul realizarii este infinit, axioma 3 este inlocuita de:

Axioma 3*: Daca evenimentele $E_1, E_2, \dots$ sunt reciproc exclusive, atunci:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots \quad (\text{I.22}).$$

I.2.3.2. Regula adunarii

Din axioma 3 se obtine prin inductie [3]:

Teorema 1: Daca $E_1, E_2, \dots, E_m$ sunt evenimente reciproc exclusive (disjuncte), atunci:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_m) \quad (\text{I.23}).$$

Teorema 2 – Regula adunarii pentru evenimente arbitrare: Daca E_1 si E_2 sunt doua evenimente arbitrare din spatiul realizarii S , atunci:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \quad (\text{I.24}).$$

Pentru un eveniment E si pentru complementul sau $\bar{E}$, folosind axiomele 2 si 3 avem:

$$P(E \cup \bar{E}) = P(E) + P(\bar{E}) = P(S) = 1 \quad (I.25).$$

Acest rezultat conduce la:

Teorema 3: Intre probabilitatile evenimentului E si ale complementului acestuia $\bar{E}$ exista relatia:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) \quad (I.26).$$

I.2.3.3. Probabilitati conditionate

In unele situatii probabilitatea unui eveniment, A depinde de producerea (sau nu) a unui alt eveniment, B . Daca exista acest tip de dependenta, probabilitatea relevanta in acest caz este o probabilitate conditionata, notata $P(A|B)$, numita probabilitatea de producere a evenimentului A , conditionata de producerea evenimentului B . $P(A|B)$ cuantifica numeric sansa de realizare a evenimentului A din spatiul realizarii B (sansa de realizare a unui punct din A care este in B). Relatia de calcul este [3]:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (I.27),$$

unde numitorul din relatia (I.27) realizeaza normalizarea in spatiul reconstituit al realizarii B .

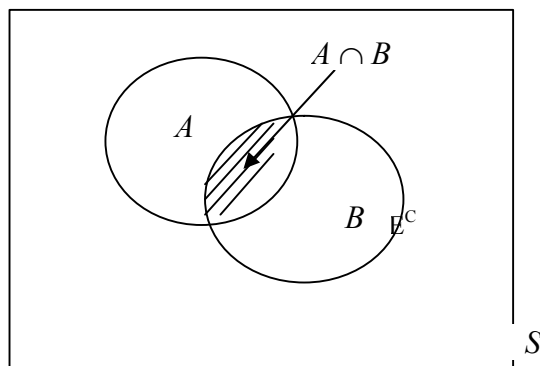


Figura I.5. Diagrama Venn ce reprezinta probabilitatea de producere a evenimentului A conditionata de producerea evenimentului B , $P(A|B)$

Similar, probabilitatea de producere a evenimentului B conditionata de producerea evenimentului A este:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{I.28}).$$

De fapt, probabilitatea conditionata este o generalizare a probabilitatii neconditionate; astfel, probabilitatea evenimentului E este implicit conditionata de spatiul realizarii S , astfel incat:

$$P(E|S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} \quad (\text{I.29}).$$

Dar $E \cap S = E$ si $P(S) = 1$, deci $P(E|S) = P(E)$.

Se demonstreaza ca [3]:

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) \quad (\text{I.30}).$$

I.2.3.4. Independenta statistica

Daca producerea sau neproducerea unui eveniment, B nu afecteaza probabilitatea de producere a unui alt eveniment, A atunci cele doua evenimente sunt independente statistic [3]:

$$P(A|B) = P(A) \quad (\text{I.31})$$

$$P(B|A) = P(B) \quad (\text{I.32}).$$

Pentru doua evenimente reciproc exclusive (disjuncte) avem:

$$P(A|B) = 0 \quad (\text{I.33}).$$

I.2.3.5. Regula inmultirii

Daca se rezolva ecuatiile (I.27) si (I.28) pentru $P(A \cap B)$ rezulta [3]:

Teorema 4: Pentru doua evenimente A si B din spatiul realizarii avand $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ avem:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \quad (\text{I.34}).$$

Daca evenimente A si B sunt independente statistic avem:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (\text{I.35}).$$

Relatia (I.35) este folosita si ca demonstratie ca doua evenimente sunt independente statistic. Similar, m evenimente $A_1, \dots, A_m$, sunt independente statistic daca pentru orice multime de k evenimente $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_k}$ (unde $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m$ si $k = 2, 3, \dots, m$), avem:

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_k}). \quad (\text{I.36}).$$

I.2.3.6. Teorema probabilitatilor totale

In unele situatii, probabilitatea de producere a unui eveniment A nu poate fi determinata direct, deoarece producerea sa depinde de realizarea (sau nu) a unor alte evenimente $B_i, i=1, 2, \dots, n$. Fie n evenimente $B_1, B_2, \dots, B_n$ ce sunt reciproc exclusive (disjuncte), $(B_i \cap B_j) = \emptyset$ si colectiv exhaustive (formeaza o multime completa), $(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S)$, Figura I.6. Daca A este un eveniment in acelasi spatiu al realizarilor S avem [3]:

$$A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n) \quad (\text{I.37}).$$

Deoarece $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ sunt evenimente disjuncte, conform regulii adunarii avem:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \quad (\text{I.38}).$$

Aplicand regula inmultirii in relatia (I.38) se obtine teorema probabilitatilor totale (Teorema 5):

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A | B_n) \cdot P(B_n) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i) \quad (\text{I.39}).$$

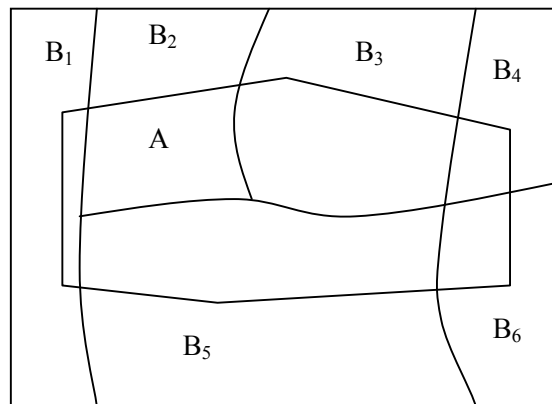


Figura I.6. Intersectia evenimentului A cu multimea completa de evenimente disjuncte B_i

I.2.3.7. Teorema lui Bayes

Teorema lui Bayes ofera o metoda de a corecta o probabilitate determinata apriori pe baza unor noi informatii. Se porneste cu o estimare pentru probabilitatea unei ipoteze, I numita probabilitate a-priori pentru ipoteza I . Daca avem noi date, D ce privesc ipoteza I , se poate calcula o probabilitate corectata pentru ipoteza I , numita probabilitate a-posteriori. Corectia se face cu formula ce decurge din teorema lui Bayes. Fie $P(I)$ probabilitatea ca ipoteza I sa fie corecta – probabilitatea a-priori. Probabilitatea a-posteriori (corectata de noile informatii D) este o probabilitate conditionata, $P(I|D)$. Fie $P(D|I)$ probabilitatea ca sa apara informatiile D daca ipoteza I este adevarata si fie $P(D|I_{falsa})$ probabilitatea ca sa apara informatiile D daca ipoteza I este falsa. Probabilitatea ca ipoteza I sa fie falsa se determina cu relatia evidenta: $P(I_{falsa})=1-P(I)$. In acest caz relatia lui Bayes este [2]:

$$P(I|D) = \frac{P(I) \cdot P(D|I)}{P(D)} = \frac{P(I) \cdot P(D|I)}{P(D|I) \cdot P(I) + P(D|I_{falsa}) \cdot P(I_{falsa})} \quad (I.40).$$

In forma sa cea mai generala, formula lui Bayes se deduce pornind de la egalitatea

$$P(A|B_i) \cdot P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A),$$

de unde, folosind formula probabilitatilor totale se obtine relatia [3]:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j) \cdot P(B_j)} \quad (I.41)$$

Teorema lui Bayes este un instrument puternic pentru revizuirea si imbunatatirea unei probabilitati pe masura ce noi date devin disponibile; aceasta teorema permite calculul probabilitatii a-posteriori, $P(B_i|A)$ in functie de probabilitatea initiala, $P(B_i)$ si de probabilitatile conditionate, $P(A|B_i)$.

I.3. Variabile aleatoare si repartitii de probabilitate

I.3.1. Definitii si relatii de baza

Fata de cunostintele dobandite la cursul de Siguranta Constructiilor din anul IV, in capitolul 3 se reiau unele notiuni fundamentale privind variabilele aleatoare si se fac unele completari necesare pentru efectuarea analizelor de siguranta / fiabilitate structurala.

O variabila aleatoare, X este o marime a carei valoare nu poate fi prezisa, cu suficienta acuratete, inainte de efectuarea unei observatii. O definitie alternativa poate fi formulata astfel: o variabila aleatoare este o functie ale carei valori sunt numere reale si depind de sansa. Daca se atribuie o valoare numerica pentru orice eveniment ce poate sa apara ca rezultat al unei observatii (al unui experiment), multimea rezultanta de numere posibile este o variabila aleatoare. Variabilele aleatoare sunt continue sau discrete. In continuare se va trata cazul variabilelor aleatoare continue, deoarece acestea sunt de interes, in general, in analizele de siguranta / fiabilitate a structurilor.

Functiile de probabilitate determina distributia de probabilitate a variabilei aleatoare continue, X in mod univoc. Se definesc [4]:

- densitatea de repartitie, $f_X(x)$, definita prin

$$- f_X(x)dx = P(x \leq X \leq x + dx) \quad (I.42)$$

si avand proprietatea

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \quad (I.43)$$

- functia de repartitie, $F_X(x)$, definita prin

$$- F_X(x) = P(X \leq x) \quad (I.44)$$

si avand proprietatea

$$- F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du . \quad (I.45)$$

Densitatea de repartitie se obtine prin derivarea functiei de repartitie:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (I.46)$$

Daca se face schimbarea de variabila: $Y = \frac{X-a}{b}$, functia de repartitie si densitatea de repartitie ale noii variabile aleatoare Y devin:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-a}{b} \leq \frac{x-a}{b}\right) = P(Y \leq y) = F_Y(y) \quad (I.47)$$

$$\begin{aligned} F_X(x) = F_Y(y) &\Rightarrow dF_X(x) = dF_Y(y) \Rightarrow f_X(x)dx = f_Y(y)dy \Rightarrow \\ f_X(x) &= \frac{1}{b} \cdot f_Y(y) \end{aligned} \quad (I.48).$$

Fie doua variabile aleatoare continue, X si Y . In acest caz se definesc functii de probabilitate bivariate, astfel [4]:

- densitatea de repartitie bivariata, $f_{XY}(x,y)$, definita prin

$$- f_{XY}(x, y)dx dy = P(x \leq X \leq x + dx \text{ si } y \leq Y \leq y + dy) \quad (\text{I.49})$$

si avand proprietatea

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx dy = 1 \quad (\text{I.50})$$

- functia de repartitie bivariata, $F_{XY}(x, y)$, definita prin

$$- F_{XY}(x, y) = P(X \leq x \text{ si } Y \leq y) \quad (\text{I.51})$$

si avand proprietatea

$$- F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v)dv du . \quad (\text{I.52})$$

Densitatea de repartitie bivariata se obtine prin derivarea functiei de repartitie bivariate:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.53}).$$

Densitatea de repartitie univariata a variabilei aleatoare X se numeste densitate de repartitie marginala, ce se obtine prin aplicarea regulii adunarii probabilitatilor $f_{XY}(x, y)dx dy$ pe intreg domeniul variabilei Y :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy \quad (\text{I.54}).$$

In mod similar obtinem densitatea de repartitie marginala a variabilei aleatoare Y :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx \quad (\text{I.55}).$$

Probabilitatea ca $y \leq Y \leq y + dy$ daca $x \leq X \leq x + dx$ este numeric egala cu $f(y|x)dy$, unde $f(y|x)$ este densitatea de repartitie conditionata a lui Y pentru $X=x$ si este definita ca [4]:

$$f(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad (\text{I.56}).$$

Din relatia (I.56) rezulta ca:

$$f_{XY}(x, y) = f(y|x) \cdot f_X(x) = f(x|y) \cdot f_Y(y) \quad (\text{I.57}).$$

Daca X si Y sunt variabile aleatoare independente, avem:

$$f(x|y) = f_X(x) \quad (\text{I.58})$$

$$f(y|x) = f_Y(y) \quad (\text{I.59}).$$

Combinand relatiile (I.57)...(I.59) rezulta ca, pentru doua variabile aleatoare independente, densitatea de repartitie bivariata este egala cu produsul densitatilor de repartitie ale variabilelor individuale [4]:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (\text{I.60}).$$

I.3.2. Descriptori ai variabilelor aleatoare continue

- Valoarea medie a variabilei aleatoare continue X , notata cu $E[X]$ sau μ_X :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad (\text{I.61});$$

- Modul variabilei aleatoare continue X , notata cu $\hat{x}$, care este valoarea cea mai probabila a variabilei aleatoare ce corespunde punctului de maxim (varfului) densitatii de repartitie;
- Mediana variabilei aleatoare continue X , notata cu $\tilde{x}$ (sau x_m , sau $x_{0,50}$), care este valoarea variabilei aleatoare ce corespunde unei valori de 0,50 a functiei de repartitie, $F_X(x_m) = 0,50$; valorile mai mici sau mai mari ca mediana sunt echiprobabile;
- Dispersia variabilei aleatoare continue X , notata cu $Var[X]$ (sau σ_X^2), care este valoarea asteptata a cantitatii $[X - E[X]]^2$,

$$Var[X] = E\{[X - E[X]]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_X]^2 f_X(x) dx \quad (\text{I.62});$$

Prelucrând definitia (I.62), se obtine urmatoarea relatie intre dispersie, valoarea medie patratica si patrutul mediei:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \mu_X^2 \quad (\text{I.63}).$$

- Abaterea standard a variabilei aleatoare continue X , notata σ_X este radacina patrata a dispersiei:

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} \quad (\text{I.64});$$

- Coeficientul de variatie a variabilei aleatoare continue X , notat V_X este raportul intre abaterea standard si media variabilei aleatoare X :

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (\text{I.65});$$

- Covarianta lui X si Y , notata $Cov[X, Y]$ este definita prin:

$$Cov[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \quad (\text{I.66}),$$

unde:

$$E[X, Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{XY}(x, y) dx \cdot dy \quad (I.67).$$

Daca X si Y sunt variabile aleatoare independente statistic, rezulta din relatiile (I.60) si (I.67):

$$E[X, Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) dx \cdot dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy = E[X] \cdot E[Y] \quad (I.68).$$

Folosind relatiile (I.66) si (I.68), rezulta ca pentru doua variabile aleatoare independente statistic covarianta acestora, $Cov[X, Y] = 0$. Daca $Cov[X, Y]$ este redusa sau zero, exista o relatie liniara slaba sau nu exista o relatie liniara intre valorile lui X si Y (dar, intre X si Y poate exista o relatie neliniara); deci, $Cov[X, Y]$ este o masura a gradului in care exista o relatie liniara intre variabilele aleatoare X si Y .

- Coeficientul de corelatie intre X si Y (sau covarianta normalizata), notat ρ_{XY} si definit prin:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (I.69),$$

Coeficientul de corelatie are valori in intervalul $[-1, 1]$. Daca $\rho_{XY} \rightarrow 1$, exista o corelatie liniara pozitiva puternica intre cele doua variabile (de tipul $Y = a + bX$), Figura I.7; daca $\rho_{XY} \rightarrow -1$, exista o corelatie liniara negativa puternica intre cele doua variabile (de tipul $Y = a - bX$), Figura I.8; daca X si Y sunt independente, $\rho_{XY} \rightarrow 0$, Figura I.9 (reciproca acestei afirmatii nu este intotdeauna valabila, deoarece poate exista o dependenta neliniara intre cele doua variabile, Figura I.10). Desi coeficientul de corelatie este o masura a dependentei liniare dintre doua variabile, existenta dependentei liniare nu implica, in mod necesar, o relatie cauza-efect intre cele doua variabile.

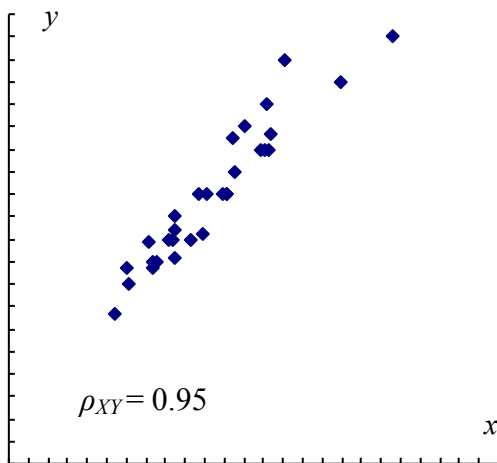


Figura I.7. Corelatie liniara pozitiva puternica

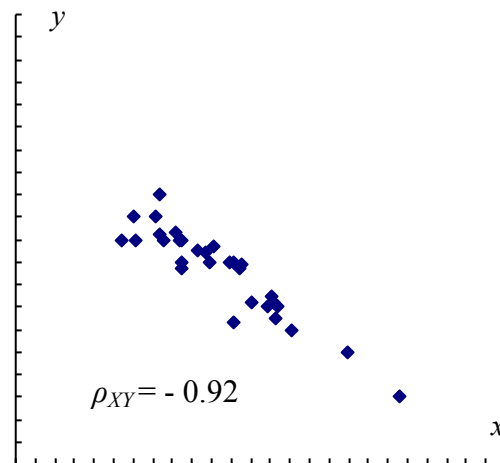


Figura I.8. Corelatie liniara negativa puternica

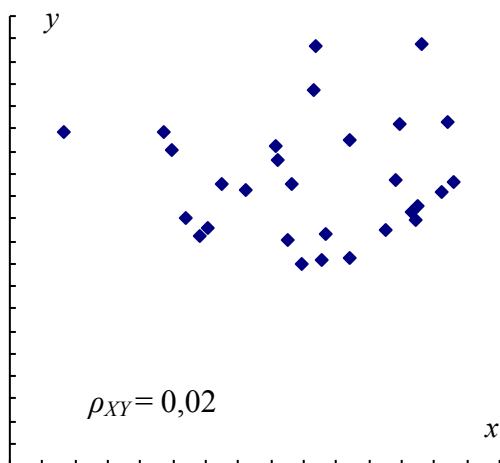


Figura I.9. Corelatie liniara slaba; variabile independente

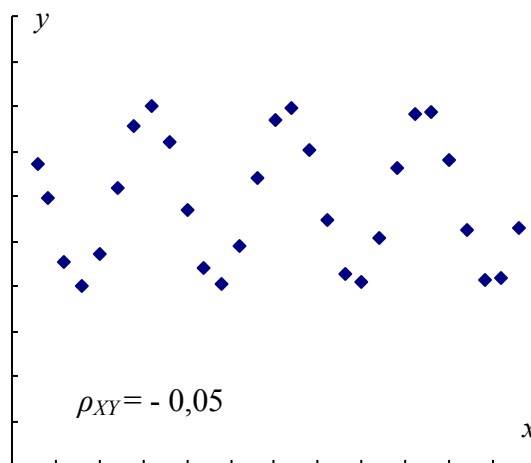


Figura I.10. Corelatie liniara slaba; dependenta neliniara intre variabile

I.3.3. Repartitia Poisson

Repartitia Poisson este o repartitie aplicabila variabilelor aleatoare discrete. Aceasta repartitie este utilizata, in special, in analizele probabilistice de hazard si risc seismic, atunci cand se calculeaza probabilitatea de aparitie (o data sau de mai multe ori) a unor evenimente rare intr-un interval de timp definit.

Fie o clasa de evenimente aleatoare; fiecare eveniment se poate produce independent de celelalte si cu egala probabilitate in orice moment de timp din intervalul $[0, T]$. Se defineste o variabila aleatoare ce consta din numarul N de evenimente ce se vor produce intr-un interval de timp arbitrar, $\tau = t_2 - t_1$ ($0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$). Fie $P[n, \tau]$ probabilitatea ca sa se produca " n " evenimente in timpul " τ ". Daca se admite ca producerea unui eveniment intr-un interval de timp este independenta statistic de producerea altui eveniment (din aceeasi clasa) in alt interval de timp, rezulta ca probabilitatea $P[n, \tau]$ nu este influentata de producerea oricarui alt eveniment in afara intervalului τ si este data de relatia urmatoare ce descrie repartitia de probabilitate Poisson [1]:

$$P[N = n, \tau] = \frac{(\lambda \tau)^n \cdot e^{-\lambda \tau}}{n!} \quad (I.70),$$

unde λ este rata medie a evenimentelor (numarul asteptat de evenimente pe unitatea de timp); in consecinta, $\lambda \tau$ este numarul asteptat de evenimente ce se produc in intervalul de timp τ . In cazul repartitiei Poisson, media este egala cu dispersia variabilei aleatoare N [1]:

$$E[N] = Var[N] = \lambda \tau \quad (I.71).$$

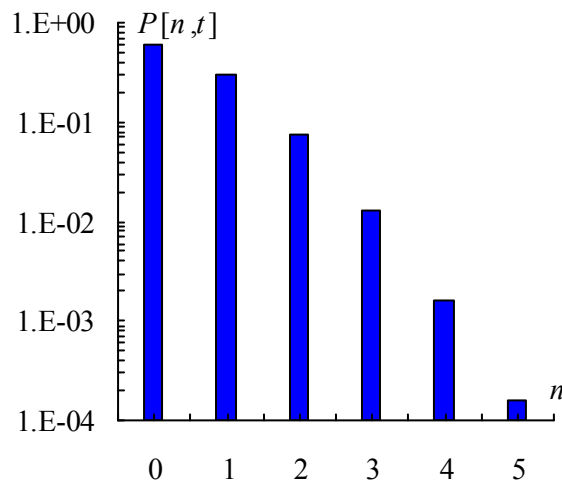


Figura I.11. Repartitia Poisson pentru $\lambda = 0,01$ (intr-un an) si $\tau = 50$ ani

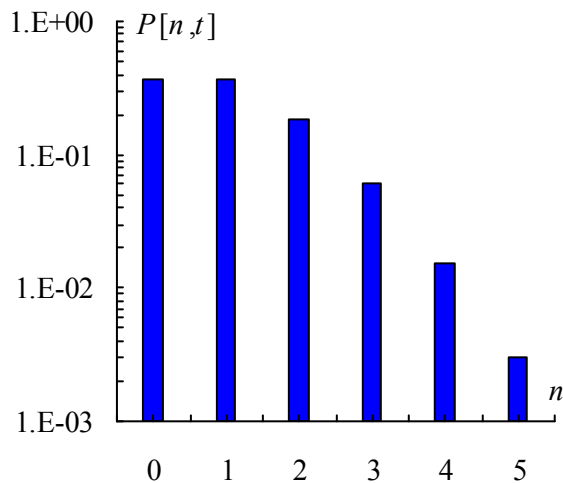


Figura I.12. Repartitia Poisson pentru $\lambda = 0,01$ (intr-un an) si $\tau = 100$ ani

I.3.4. Repartitia Pareto generalizata

Teoria clasica a repartitiei valorilor extreme se bazeaza pe analiza unui set de date ce cuprinde cele mai mari (sau cele mai mici) valori dintr-un numar de seturi de baza comparabile, numite epoci. Uzual, analiza repartitiei valorilor extreme se face considerand un set de date ce cuprinde valorile maxime (sau minime) anuale ale unui parametru ce descrie un hazard natural; in acest caz epoca este egala cu un an. Exista trei tipuri de repartitii asimptotice de probabilitate (listate in ordinea descrescatoare a lungimii cozii densitatii de repartitie):

- Fréchet (tip II);
- Gumbel (tip I);
- Weibull (tip III).

Teoriile mai recente fac posibila analizarea tuturor datelor ce depasesc un prag specificat (dar care trebuie sa fie suficient de inalt), chiar daca acestea nu sunt valorile maxime (sau minime) din fiecare epoca. In acest sens, repartitia Pareto generalizata a fost dezvoltata folosind faptul ca depasirile unui prag suficient de inalt sunt evenimente rare pentru care se aplica repartitia Poisson. Functia de repartitie de tip Pareto generalizata a variabilei aleatoare Y este data de relatia [1]:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = 1 - \left[1 + \left(\frac{c \cdot y}{a} \right) \right]^{-\frac{1}{c}} \quad (I.72),$$

$$\text{cu } a > 0 \text{ si } 1 + \left(\frac{c \cdot y}{a} \right) > 0.$$

Variabila aleatoare Y este depasirea (excesul) variabilei aleatoare X peste pragul u , $Y = X - u$, cu $x > u$ pentru u suficient de mare. In acest fel se poate creste marimea esantionului de date. De exemplu, se presupune ca s-au inregistrat urmatoarele date ale vitezei maxime anuale ale vantului:

- anul 1 – viteza maxima a vantului – 30 m/s;
- anul 2 - viteza maxima a vantului – 45 m/s; dar, in acelasi an, s-au inregistrat si urmatoarele viteze independente: 31, 36, 40, 44 m/s.

In abordarea clasica, setul de date este alcatuit din doua valori: 30 m/s si 45 m/s. In abordarea folosind valoarea prag $u = 30$ m/s, setul de date este alcatuit din 6 date, una in primul an si cinci in cel de al doilea an ($X = 30, 45, 31, 36, 40, 44$ m/s, $Y = 0, 15, 1, 6, 10, 14$ m/s).

Date fiind media si abaterea standard a variabilei aleatoare Y , parametrii repartitiei Pareto generalizata sunt [1]:

$$a = \frac{1}{2} \mu_Y \left[1 + \left(\frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \quad (I.73)$$

si

$$c = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \quad (I.74).$$

Pentru a gasi valoarea variabilei aleatoare X cu un anumit interval mediu de recurenta (sau perioada medie de revenire), $\bar{T}$ se face urmatorul rationament: fie λ numarul mediu anual de depasiri unui prag arbitrar ales $x = u$; numarul mediu de depasiri ale pragului in $\bar{T}$ ani este $\lambda \bar{T}$. Probabilitatea de depasire, $P[X > x = u]$ in oricare din “incercari” (pentru fiecare masuratoare) este $\frac{1}{\lambda \bar{T}}$; rezulta ca probabilitatea de nedepasire, $P[X \leq x] = 1 - \frac{1}{\lambda \bar{T}}$. Deoarece intre variabilele aleatoare X si Y exista o relatie liniara, rezulta ca

$$X \leq x \Rightarrow X - u \leq x - u \Rightarrow Y \leq y \quad (I.75)$$

si functia de repartitie ramane neschimbata:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X \leq x] = 1 - \frac{1}{\lambda \bar{T}} \quad (I.76).$$

Se observa analogia relatiei (I.76) cu cea din teoria clasica a valorilor extreme, $P[X \leq x] = 1 - \frac{1}{T}$.

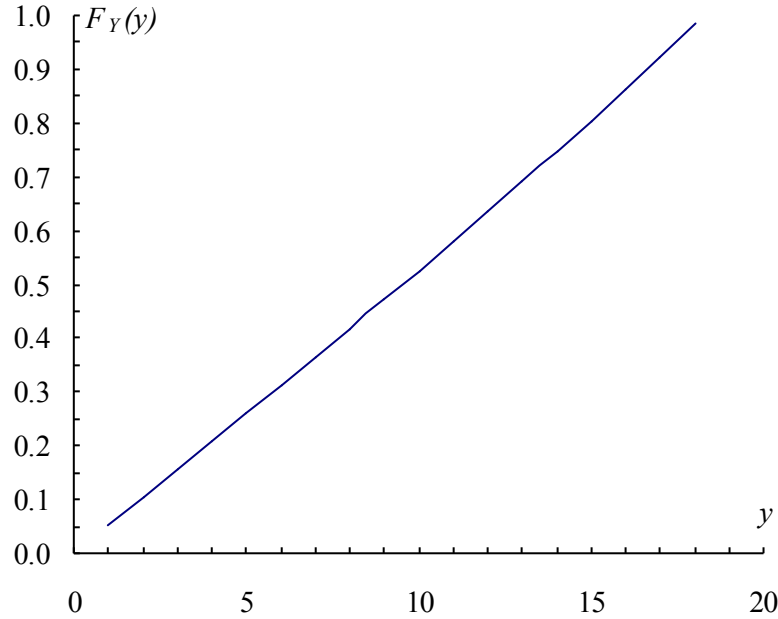


Figura I.13. Functia de repartitie de tip Pareto generalizata pentru variabila aleatoare Y cu media de 9 m/s si abaterea standard de 5 m/s

Folosind relatia (I.72) rezulta ca

$$F_Y(y_p) = P[Y \leq y_p] = p = 1 - \left[1 + \left(\frac{c \cdot y_p}{a} \right) \right]^{-\frac{1}{c}} \quad (\text{I.77}),$$

de unde avem

$$1 + \left(\frac{c \cdot y_p}{a} \right) = \left(\frac{1}{1-p} \right)^c \Rightarrow \frac{c \cdot y_p}{a} = \left(\frac{1}{1-p} \right)^c - 1$$

si in final obtinem valoarea variabilei aleatoare Y cu probabilitatea anuala de nedepasire p :

$$y_p = \frac{a}{c} \left[\left(\frac{1}{1-p} \right)^c - 1 \right] \quad (\text{I.78}).$$

Valoarea cautata a variabilei aleatoare X cu probabilitatea anuala de nedepasire p :

$$x_p = y_p + u \quad (\text{I.79}).$$

I.3.5. Prelucrarea datelor statistice

Datele obtinute din observatii reale pot fi privite ca valori discrete ale variabilei aleatoare ce reprezinta fenomenul observat. Comportarea datelor de observatie este mai departe descrisa de modele adecvate ce guverneaza comportarea variabilei aleatoare de interes in observatiile efectuate. Gasirea modelului adecvat implica:

- (i) gasirea repartitiei de probabilitate ce descrie adecvat comportarea datelor de observatie;
- (ii) estimarea parametrilor repartitiei de probabilitate.

Parametrii repartitiei de probabilitate se gasesc folosind estimatori ai acestora determinati pe baza sirului de date de observatie ce alcatuiesc esantionul. Un estimator este o functie $\hat{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ce depinde de valorile x_i din esantion, determinat astfel incat $\hat{\alpha}$ este o aproximare rezonabila a valorii necunoscute α a parametrului repartitiei. Estimatorul $\hat{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este o variabila aleatoare deoarece este o functie de valorile unei variabile aleatoare obtinute in urma unui sir de observatii, valori ce sunt diferite de cele obtinute in urma unui alt sir de observatii ale aceluiasi fenomen. Cu alte cuvinte, estimatorul depinde de esantionul de date de observatii folosit in determinarea acestuia. In acest sens se da urmatorul exemplu:

Se considera o secventa observata de 15 rezultate ale unui experiment ce consta din aruncarea unei monede: S, B, B, B, S, B, S, S, B, S, S, S, B, S, B; se dau valori numerice celor doua rezultate posibile ale fiecarei incercari (aruncari); S (stema) = 0, B (banul) = 1. Secventa se transforma in: 0,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1. Esantionul de date de observatie este extras dintr-o populatie infinita care, in cazul unei monede corecte, va avea valoarea medie $\alpha = \frac{1}{2}$. Un estimator

pentru media α a populatiei este media esantionului, considerand toate cele 15 valori ale variabilei aleatoare, $\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i = \frac{7}{15}$. Daca se considera doar primele 7 valori ale

variabilei aleatoare, estimatorul mediei populatiei este $\hat{\alpha} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i = \frac{4}{7}$. Daca se considera ultimele

8 valori ale variabilei aleatoare, estimatorul mediei populatiei este $\hat{\alpha} = \frac{1}{8} \sum_{i=8}^{15} x_i = \frac{3}{8}$.

O metoda des folosita pentru gasirea parametrilor repartitiei de probabilitate este cea a momentelor. Conform acestei metode, pentru un esantion de marime n avand valorile $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se pot folosi momente ale esantionului pentru a estima momente ale variabilei aleatoare. Astfel, se calculeaza urmatoarele momente ale esantionului:

$$\text{- media esantionului: } \bar{x} = m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{I.80}),$$

care este un estimator al mediei populatiei $E[X]$ (sau μ_X);

$$\text{- dispersia esantionului: } s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 \quad (\text{I.81}),$$

care este un estimator al dispersiei populatiei $Var[X]$ (sau σ_X^2).

Se poate demonstra ca [1]:

- valoarea asteptata a lui $\bar{x}$ este egala cu media populatiei: $E[\bar{x}] = \mu_X$;
- dispersia lui $\bar{x}$ este egala cu dispersia populatiei impartita la marimea esantionului:

$$Var[\bar{x}] = \frac{\sigma_X^2}{n}.$$

In concluzie, variabila aleatoare media esantionului $\bar{x}$ are valoarea medie $E[\bar{x}] = \mu_X$ si abaterea standard $\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$, ultima valoare fiind numita eroare de esantionare (tine cont de marimea limitata a esantionului) si intra in categoria incertitudinilor epistemice.

Daca populatia variabilei aleatoare de baza este gaussiana (normala), atunci variabila aleatoare media esantionului este de asemenea gaussiana. Mai mult, chiar daca repartitia de probabilitate a variabilei aleatoare de baza nu este gaussiana (normala), dar marimea esantionului este suficient de mare, in virtutea teoremei limita centrale, media esantionului este normala. Deci, pentru multe aplicatii practice, media esantionului este o variabila aleatoare normala $\bar{x} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)$. Daca marimea esantionului, n creste, densitatea de repartitie a mediei esantionului $\bar{x}$ devine mai ingusta si estimatorul $\bar{x}$ pentru media populatiei se imbunatateste, Figura I.14.

Daca media esantionului este o variabila aleatoare normala $\bar{x} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)$, atunci variabila aleatoare $K = \frac{\bar{x} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$ este o variabila aleatoare normala standard, $K \sim N(0,1)$, Figura I.15. Pentru

variabila aleatoare K se poate scrie relatia [1]

$$P\left[k_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \leq k_{(1-\alpha/2)}\right] = 1 - \alpha \quad (\text{I.82}),$$

unde:

$1-\alpha$ – este o probabilitate specificata

$$k_{\alpha/2} = -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (\Phi \text{ este funcția de repartiție normală standard})$$

$$k_{(1-\alpha/2)} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

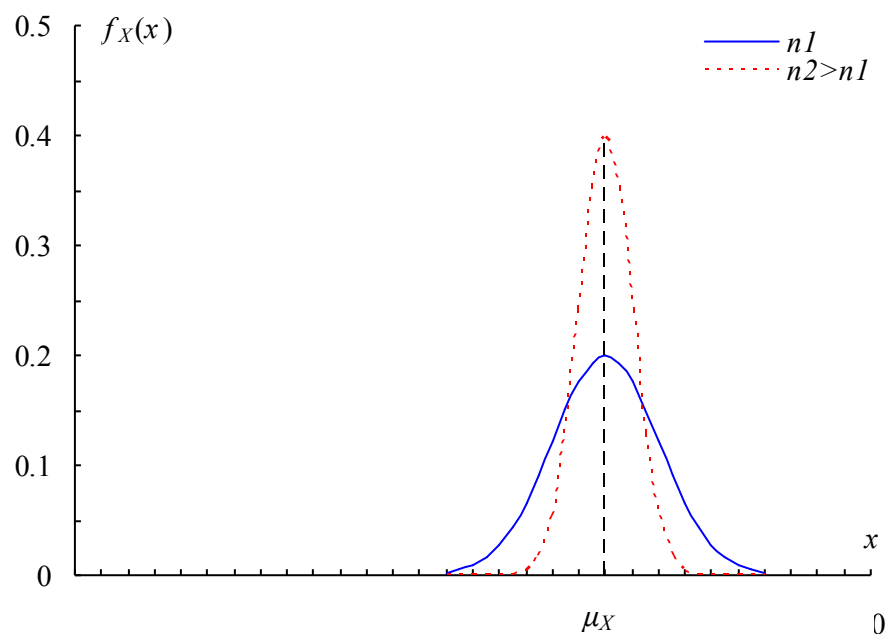


Figura I.14. Densitatea de repartiție a mediei esantionului pentru două marimi ale acestuia

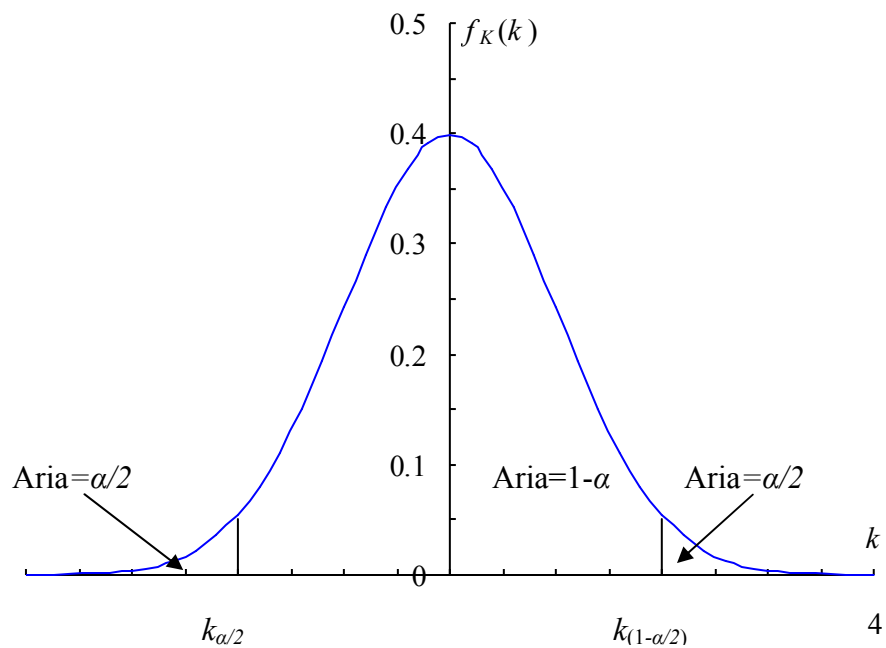


Figura I.15. Densitatea de repartiție a variabilei aleatoare K

Relatia (I.82) poate fi rescrisa ca

$$P\left[\bar{x} + k_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu_X \leq \bar{x} + k_{(1-\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \quad (\text{I.83}),$$

din care obtinem intervalul de incredere $(1-\alpha)$ pentru media populatiei [1]:

$$\mu_{(1-\alpha)} = \left(\bar{x} + k_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}; \bar{x} + k_{(1-\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \right) \quad (\text{I.84}).$$

Exemplul 1: Variabila aleatoare considerata este rezistenta la curgere a barelor de armatura. Sa se determine intervalul in care, cu o incredere de 90%, se va situa adevarata valoare medie a rezistentei la curgere (valoare medie a populatiei). Se stie ca $\bar{x} = 390$ MPa, $\sigma_X = 35$ MPa si $n=25$.

Daca intervalul de incredere $1-\alpha=0,90$, valoarea $\alpha = 0,10$. Deci:

$$k_{\alpha/2} = k_{0,05} = -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0,10}{2}\right) = -\Phi^{-1}(0,95) = -1,645$$

$$k_{(1-\alpha/2)} = k_{0,95} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0,10}{2}\right) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$$

$$\mu_{(0,90)} = \left(390 - 1,645 \cdot \frac{35}{\sqrt{25}}; 390 + 1,645 \cdot \frac{35}{\sqrt{25}} \right) = (378,5; 401,5) \text{ MPa}.$$

Cu o probabilitate de 90%, valoarea reala (adevarata) a mediei, μ_X va fi in intervalul (378,5; 401,5) MPa.

Exemplul 2: Rezultatele testelor efectuate pe 100 bare de armatura selectate aleator au condus la urmatoarele rezultate:

- media rezistentei la curgere pentru esantion este $\bar{x} = 400$ MPa;
- abaterea standard a rezistentei la curgere pentru esantion este $s_X = 40$ MPa.

Pentru a intocmi specificatia tehnica, producatorul barelor trebuie sa specifice valoarea limita inferioara a rezistentei la curgere cu 95% incredere. Se cere sa se determine aceasta valoare.

Deoarece esantionul este suficient de mare ($n = 100$), se poate presupune ca abaterea standard a populatiei, σ_X este bine reprezentata de de abaterea standard a esantionului, s_X . Pentru a rezolva problema, relatia (I.82) se scrie sub forma

$$P\left[\frac{\bar{x} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \leq k_{(1-\alpha)}\right] = 1 - \alpha$$

de unde se determina probabilitatea ceruta

$$P\left[\mu_X \geq \bar{x} - k_{(1-\alpha)} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

din care se obtine valoarea limita inferioara a rezistentei la curgere cu 95% incredere:

$$\mu_{(1-\alpha)} = \bar{x} - k_{(1-\alpha)} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}.$$

Daca nivelul de incredere $1-\alpha=0,95$, valoarea $\alpha = 0,05$. Deci:

$$k_{(1-\alpha)} = k_{0,95} = \Phi^{-1}(1 - 0,05) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$$

In final se obtine valoarea limita inferioara a rezistentei la curgere cu 95% incredere:

$$\mu_{0,95} = \bar{x} - k_{(1-\alpha)} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = 400 - 1,645 \cdot \frac{40}{\sqrt{100}} = 393 \text{ MPa}.$$

Prodicatorul poate fi 95% sigur ca rezistenta medie la curgere a barelor de armatura este cel putin 393 MPa.

I.4. Elemente de teoria proceselor aleatoare

I.4.1. Introducere

Fie un proces ale carui realizari posibile formeaza un ansamblu (o colectie) de functii de timp, $\{y(t)\}$. O functie membru a ansamblului poarta denumirea de realizare a functiei. Procesul se numeste stochastic (sau aleator) daca valorile functiilor membru ale ansamblului, la orice moment de timp, reprezinta o variabila aleatoare. O realizare a functiei intr-un proces aleator poarta numele de semnal aleator.

Un proces aleator care este o functie de timp se numeste stationar daca proprietatile sale statistice nu depind de alegerea originii scarii temporale; aceasta proprietate poate fi rezumta prin: “orice a inceput la un moment dat poate sa inceapa la fel de verosimil in orice alt moment”. Pentru un proces stationar, media si valoarea medie patratica sunt constante in raport cu timpul.

Media ansamblului unui proces aleator este media realizărilor pentru orice moment de timp dat. Un proces aleator staționar este ergodic dacă, pentru acel proces, mediile temporale sunt egale cu mediile ansamblului. Ergodicitatea cere ca fiecare realizare a procesului să fie tipică (reprezentativă) pentru întreg ansamblul. În aplicații este convenabil să se considere că un semnal aleator staționar este o superpoziție de componente armonice pentru un interval continuu de frecvențe.

I.4.2. Serii Fourier și integrale Fourier

Fie $x(t)$ o funcție periodică cu media zero și perioadă T . Dezvoltarea în serie Fourier a funcției este dată de relația [5]

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \cos(2\pi k n_1 t - \phi_k) \quad (\text{I.85}),$$

unde:

- $n_1 = \frac{1}{T}$ este frecvența fundamentală ($2\pi n_1 = \omega_1$ este frecvența circulară – sau pulsația – fundamentală și $2\pi k n_1 = k\omega_1 = \omega_k$);

$$- \quad C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (\text{I.86})$$

$$- \quad C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (\text{I.87})$$

$$- \quad \phi_k = \arctg\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \quad (\text{I.88})$$

$$- \quad A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(2\pi k n_1 t) dt \quad (\text{I.89})$$

$$- \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(2\pi k n_1 t) dt \quad (\text{I.90}).$$

Dacă $y(t)$ este o funcție neperiodică, aceasta poate fi considerată o funcție periodică cu perioadă infinită. În acest caz se definește integrala Fourier a funcției $y(t)$ (cu considerarea doar a părții reale a integralei Fourier) [5]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(n) \cdot \cos[2\pi nt - \phi(n)] dn \quad (I.91)$$

unde:

- n este frecventa (variabila continua)

$$- \quad C(n) = \sqrt{A(n)^2 + B(n)^2} \quad (I.92)$$

$$- \quad \phi(n) = \arctg \left[\frac{B(n)}{A(n)} \right] \quad (I.93)$$

$$- \quad A(n) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot \cos(2\pi nt) dt \quad (I.94)$$

$$- \quad B(n) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot \sin(2\pi nt) dt \quad (I.95).$$

De asemenea, exista relatia [5]:

$$C(n) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot \cos[2\pi nt - \phi(n)] dt \quad (I.96).$$

Relatiile (I.91) si (I.96) arata ca $y(t)$ si $C(n)$ formeaza o pereche de transformate Fourier.

Fie o functie, $x(t)$ periodica cu media zero si perioada T ; valoarea sa medie patratica (ce este egala cu dispersia pentru functii de medie zero) este calculata cu relatia:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad (I.97).$$

Folosind relatiile (I.85) si (I.97) se poate demonstra urmatoarea forma a egalitatii lui Parseval [5]

$$\sigma_x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \quad (I.98)$$

unde:

$$- \quad S_0 = C_0^2 \quad (I.99)$$

$$- \quad S_k = \frac{1}{2} C_k^2 \quad (I.100)$$

este contributia componentei armonice cu frecventa kn , la valoarea medie patratica a lui $x(t)$.

Pentru o functie $y(t)$ neperiodica, egalitatea lui Parseval ia forma [5]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} C(n)^2 dn = 2 \int_0^{\infty} C(n)^2 dn \quad (I.101).$$

I.4.3. Densitatea spectrala de putere si functia de autocorelatie

Pentru realizările generate de procese stationare, densitatea spectrala de putere va fi definita ca un echivalent al cantitatilor S_k date de relatia (I.100). Astfel, se considera $z(t)$ un semnal aleator de medie zero. In virtutea ipotezei de stationaritate, semnalul nu are inceput si nici sfarsit - $\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)| dt \rightarrow \infty$ - si, deci, nu are integrala Fourier. Pentru a putea defini integrala Fourier, se considera un nou semnal aleator, $y(t)$ de durata T (Figura I.16) definit prin [5]:

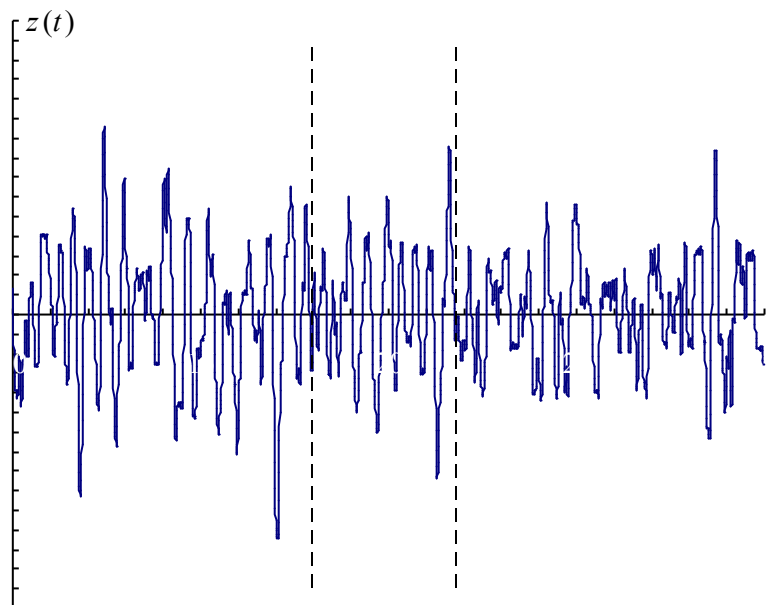
$$y(t) = \begin{cases} z(t), & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{pentru orice alt } t \end{cases} \quad (\text{I.102})$$

Functia $y(t)$ este neperiodica si intrucat exista $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt$ are integrala Fourier. De asemenea exista relatia [5]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} y(t) = z(t) \quad (\text{I.103}).$$

Valoarea medie patratica a functiei $y(t)$ este data de relatia (I.97), care, prin combinare cu relatia (I.101), conduce la rezultatul:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} C^2(n) dn \quad (\text{I.104}).$$



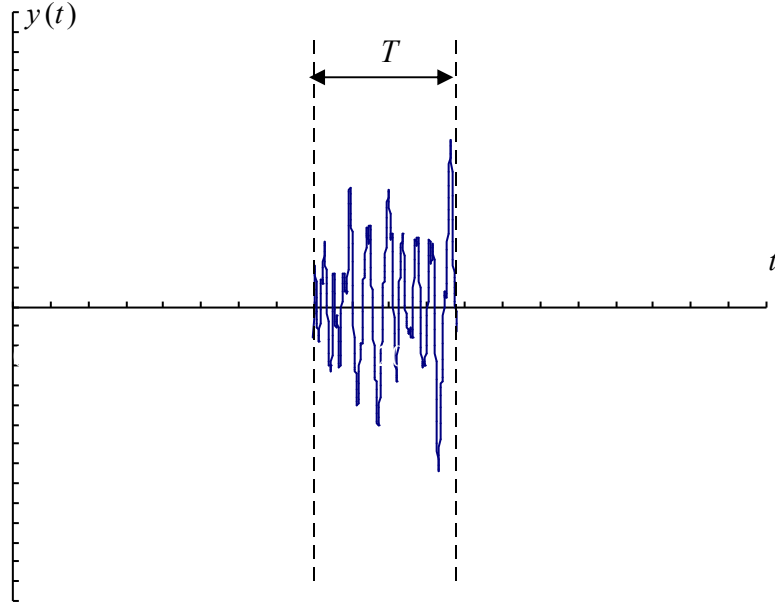


Figura I.16. Semnalele aleatoare $z(t)$ si $y(t)$

Folosind relatiile (I.103) si (I.104), se obtine valoarea medie patratica (egala cu dispersia) functiei originale $z(t)$:

$$\sigma_z^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\infty} C^2(n) dn \quad (\text{I.105}).$$

Folosind notatia $S_z(n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} C^2(n)$, se obtine relatia [5]

$$\sigma_z^2 = \int_0^{\infty} S_z(n) dn \quad (\text{I.106}),$$

unde $S_z(n)$ este densitatea spectrala de putere unilaterala a lui $z(t)$. Conform relatiei (I.106), pentru fiecare frecventa n corespunde o contributie elementara $S_z(n)dn$ la valoarea medie patratica a semnalului aleator $z(t)$.

Pentru derivatele temporale $\dot{z}(t), \ddot{z}(t)$ ale semnalului aleator $z(t)$ se obtin urmatoarele relatii:

$$S_{\dot{z}}(n) = 4\pi^2 n^2 S_z(n) \quad (\text{I.107})$$

$$S_{\ddot{z}}(n) = 16\pi^4 n^4 S_z(n) \quad (\text{I.108}).$$

Se defineste functia de autocorelatie a lui $z(t)$ ce da o masura a interdependentei variabilei aleatoare z la timpii t si $t + \tau$:

$$R_Z(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t) \cdot z(t + \tau) dt \quad (\text{I.109}).$$

Funcția de autocorelație $R_Z(\tau)$ este o funcție pară ($R_Z(\tau) = R_Z(-\tau)$) și care își atinge maximumul în origine (pentru $\tau = 0$) ($R_Z(\tau) < R_Z(0)$). Pentru $\tau = 0$, conform relației (I.109), valoarea funcției de autocorelație este egală cu dispersia:

$$R_Z(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z^2(t) dt = \sigma_Z^2 \quad (\text{I.110}).$$

Pentru valori $\tau > 0$, produsul $z(t) \cdot z(t + \tau)$ va fi uneori pozitiv, alteori negativ și media va tinde către zero - $\lim_{T \rightarrow \infty} R_Z(\tau) = 0$.

Densitatea spectrală de putere și funcția de autocorelație formează o pereche de transformate Fourier, așa cum arată relațiile Wiener-Hincin [4], [5]:

$$\begin{cases} S_Z(n) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau) \cdot \cos(2\pi n \tau) d\tau \\ R_Z(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_Z(n) \cdot \cos(2\pi n \tau) dn \end{cases} \quad (\text{I.111}).$$

Deoarece densitatea spectrală de putere și funcția de autocorelație sunt funcții pare, relațiile (I.111) devin:

$$\begin{cases} S_Z(n) = 4 \int_0^{\infty} R_Z(\tau) \cdot \cos(2\pi n \tau) d\tau \\ R_Z(\tau) = \int_0^{\infty} S_Z(n) \cdot \cos(2\pi n \tau) dn \end{cases} \quad (\text{I.112}).$$

Se definește și funcția de autocorelație normalizată:

$$\rho_Z(\tau) = \frac{R_Z(\tau)}{\sigma_Z^2} = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ \in (-1, 1), & \tau \neq 0 \\ 0, & \tau \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{I.113}).$$

În Figurile I.17 și I.18 se prezintă densitatea spectrală de putere și, respectiv, funcția de autocorelație normalizată pentru partea staționară a accelerogramei înregistrată la 4 martie 1977 pe direcția N-S în amplasamentul INCERC București.

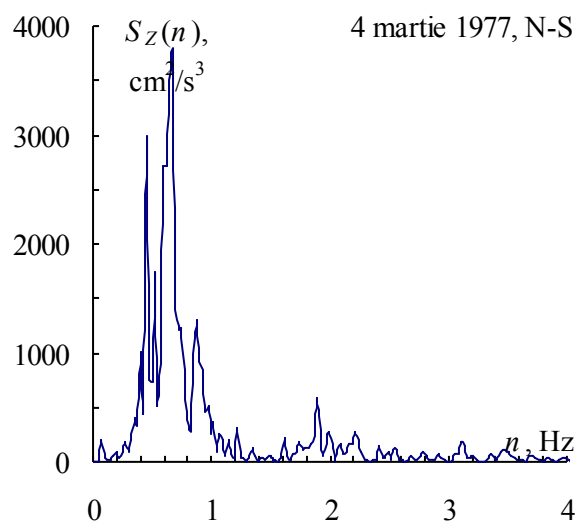


Figura I.17. Densitatea spectrala de putere a partii stationare a accelerogramei inregistrata la 4 martie 1977 pe directia N-S in amplasamentul INCERC Bucuresti

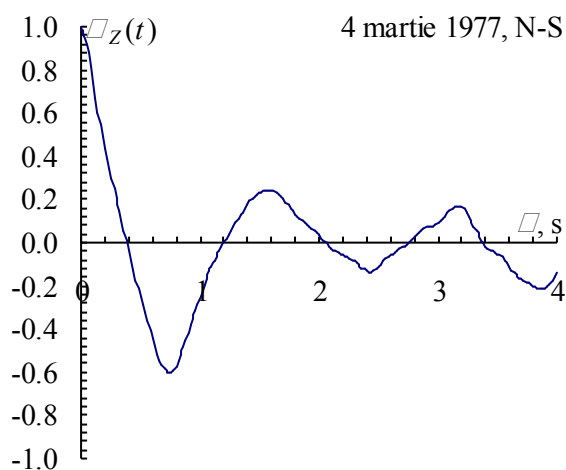


Figura I.18. Functia de autocorelatie normalizata a partii stationare a accelerogramei inregistrata la 4 martie 1977 pe directia N-S in amplasamentul INCERC Bucuresti

I.4.4. Functia de inter-corelatie si inter-spectrul densitatii de putere

Fie $z_1(t)$ si $z_2(t)$ doua semnale aleatoare de medie zero si durata T . Covarianta este media in timp a produsului celor doua semnale aleatoare si se determina cu relatia [5]:

$$\overline{z_1(t)z_2(t)} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [z_1(t)] \cdot [z_2(t)] dt \quad (\text{I.114})$$

Coeficientul de corelatie este dat de relatia:

$$\rho = \frac{\overline{z_1(t)z_2(t)}}{\sigma_{z_1} \cdot \sigma_{z_2}} \quad (\text{I.115})$$

in care numitorul este produsul abaterilor standard a celor doua semnale aleatoare $z_1(t)$ si $z_2(t)$.

Coeficientul de corelatie este egal cu zero in cazul in care nu exista nici o relatie statistica intre cele doua semnale aleatoare (lipsa corelatiei) si este egal cu 1 in cazul corelatiei perfecte.

Corelatiile temporale ale celor doua semnale $z_1(t)$ si $z_2(t)$ se pot descrie prin functia de inter-corelatie a acestora ce se defineste cu relatia [5]:

$$R_{z_1 z_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z_1(t) \cdot z_2(t + \tau) dt \quad (I.116).$$

Masura in care cele semnale $z_1(t)$ si $z_2(t)$ sunt corelate in frecventa se descrie prin functiile inter-spectrului densitatii de putere, a co-spectrului densitatii de putere si a coerentei. Inter-spectrul densitatii de putere a cele semnale aleatoare $z_1(t)$ si $z_2(t)$, $S_{z_1 z_2}^{cr}(n)$ este definit prin relatia (n este frecventa) [5]:

$$S_{z_1 z_2}^{cr}(n) = S_{z_1 z_2}^C(n) + i \cdot S_{z_1 z_2}^Q(n) \quad (I.117).$$

Partea reala a inter-spectrului este denumita co-spectrul densitatii de putere si poate fi privita ca o covarianta dependenta de frecventa. Co-spectrul densitatii de putere se determina cu relatia [5]:

$$S_{z_1 z_2}^C(n) = 4 \int_0^\infty R_{z_1 z_2}(\tau) \cdot \cos(2\pi n \tau) d\tau \quad (I.118).$$

Partea imaginara a inter-spectrului este denumita spectrul in cuadratura si se determina cu relatia [5]:

$$S_{z_1 z_2}^Q(n) = 4 \int_0^\infty R_{z_1 z_2}(\tau) \cdot \sin(2\pi n \tau) d\tau \quad (I.119).$$

O masura convenabila a gradului de corelatie in frecventa a celor doua semnale $z_1(t)$ si $z_2(t)$ este data de patrutul functiei de coerenta [5]:

$$[Coh_{z_1 z_2}(n)]^2 = \frac{|S_{z_1 z_2}^{cr}(n)|^2}{S_{z_1}(n) \cdot S_{z_2}(n)} = \frac{[S_{z_1 z_2}^C(n)]^2 + [S_{z_1 z_2}^Q(n)]^2}{S_{z_1}(n) \cdot S_{z_2}(n)} \quad (I.120)$$

unde numitorul relatiei (I.120) este produsul densitatilor spectrale de putere ale celor doua semnale aleatoare $z_1(t)$ si $z_2(t)$.

Functia de coerenta este echivalenta cu un coeficient de corelatie in frecventa:

$$Coh_{z_1 z_2}(n) = \frac{|S_{z_1 z_2}^{cr}(n)|}{\sqrt{S_{z_1}(n) \cdot S_{z_2}(n)}} = \sqrt{\frac{[S_{z_1 z_2}^C(n)]^2 + [S_{z_1 z_2}^Q(n)]^2}{S_{z_1}(n) \cdot S_{z_2}(n)}} \quad (I.121).$$

Pentru a ilustra conceptele descrise in sub-capitolele I.4.2...I.4.4 se considera miscarea seismica a terenului inregistrata la Focsani (statia Centrului National pentru Reducerea Riscului Seismic, CNRRS) in data de 27 octombrie 2004, ora 20:34:32.9 (UTC) folosind un accelerometru digital ETNA. Miscarea seismica a fost generata de un cutremur subcrustal vrancean cu magnitudinea moment $M_W=6,0$ ce s-a produs la adancimea de 76 Km. Miscarea seismica a fost inregistrata pe doua directii orizontale perpendiculare si pe directie verticala. In analiza au fost considerate doar cele doua miscari orizontale corespunzatoare directiilor N-S si E-V. Datele corespunzatoare celor doua miscari au fost procesate cu software-ul ViewWave (versiunea 1.37) programat de T. Kashima de la Building Research Institute, Tsukuba, Japan [7]. Atat accelerometrul cat si software-ul au fost donate CNRRS de catre Japan International Cooperation Agency, JICA in

cadru *Proiectului de Cooperare Tehnica pentru Reducerea Riscului Seismic la Cladiri si Structuri in Romania* (2002-2008). Miscarile seismice ale terenului inregistrate la Focsani pe directiile N-S si E-V sunt prezentate in Figura I.19. In Figurile I.20a...I.20c sunt prezentate spectrele Fourier ale amplitudinilor, densitatile spectrale de putere si functiile de autocorelatie normalizate pentru cele doua miscari seismice ale terenului considerate independent. In Figurile I.120d...I.120f sunt prezentate inter-spectrul densitatii de putere, functia de inter-corelatie normalizata si functia de coerenta pentru perechea de miscari seismice ale terenului inregistrate la Focsani.

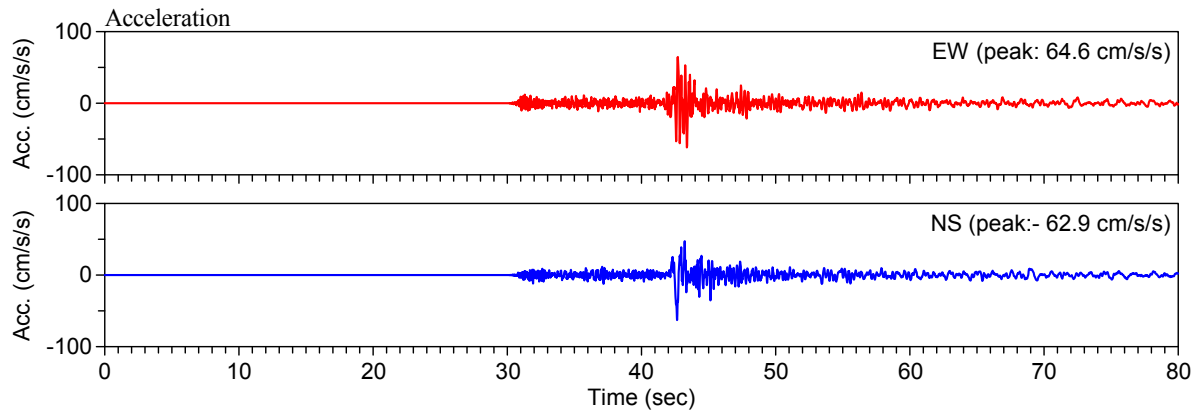


Figura I.19. Miscarile seismice ale terenului inregistrate la Focsani pe directiile E-V si N-S in data de 27 octombrie 2004, ora 20:34:32.9 (UTC)

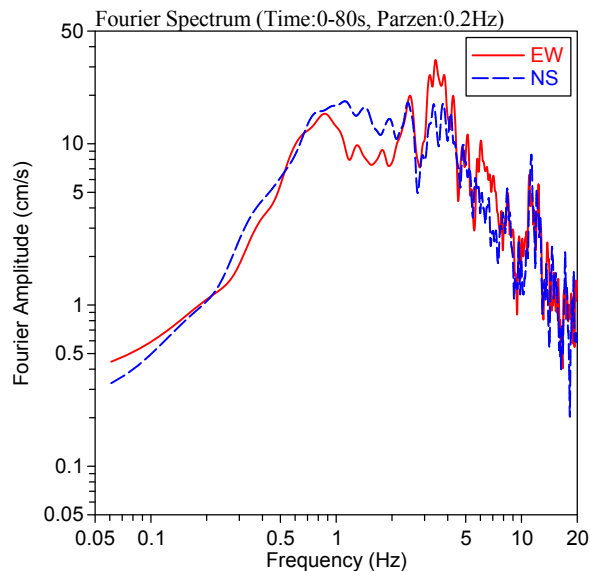


Figura I.20a. Spectrele Fourier ale amplitudinilor corespunzatoare miscarilor terenului pe doua directii

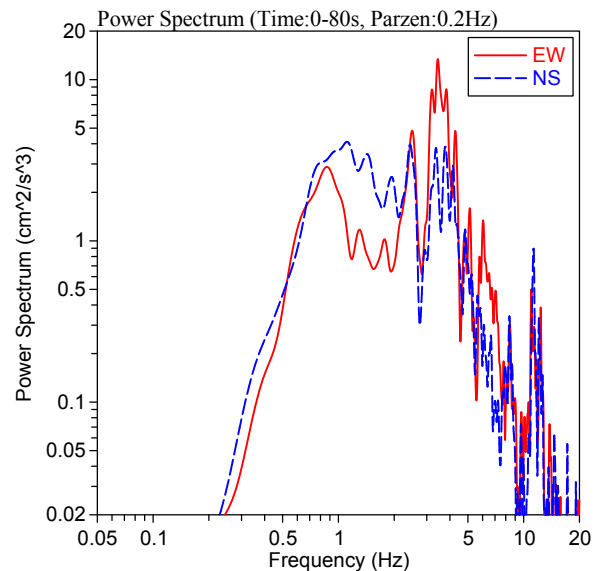


Figura I.20b. Densitatile spectrale de putere corespunzatoare miscarilor terenului pe doua directii

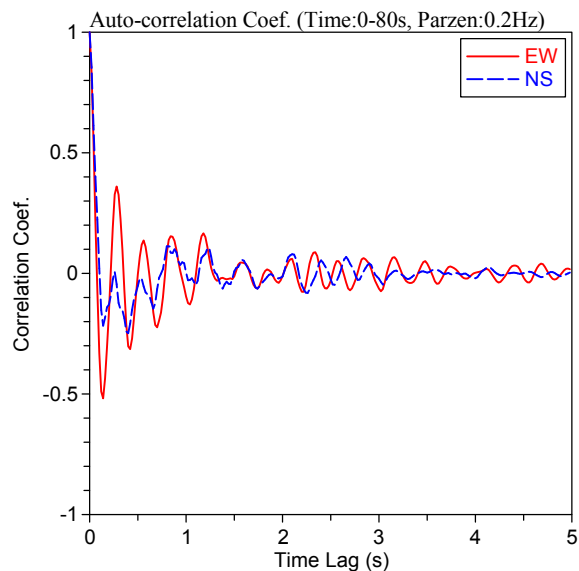


Figura I.20c. Functiile de autocorelatie normalizate corespunzatoare miscarilor terenului pe doua directii

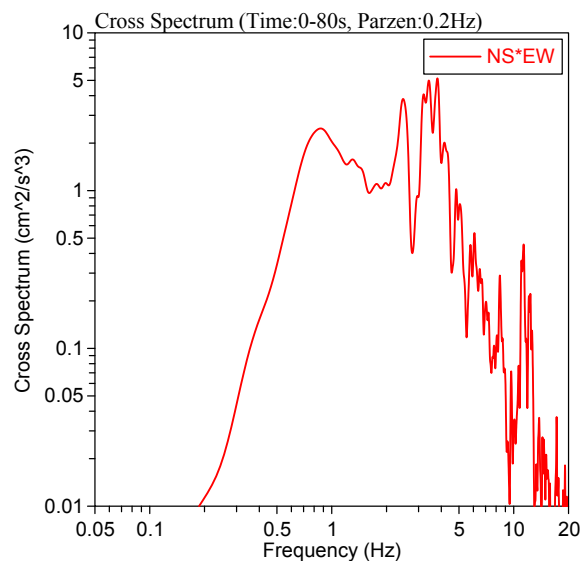


Figura I.20d. Inter-spectrul densitatii de putere pentru perechea de miscari pe cele doua directii

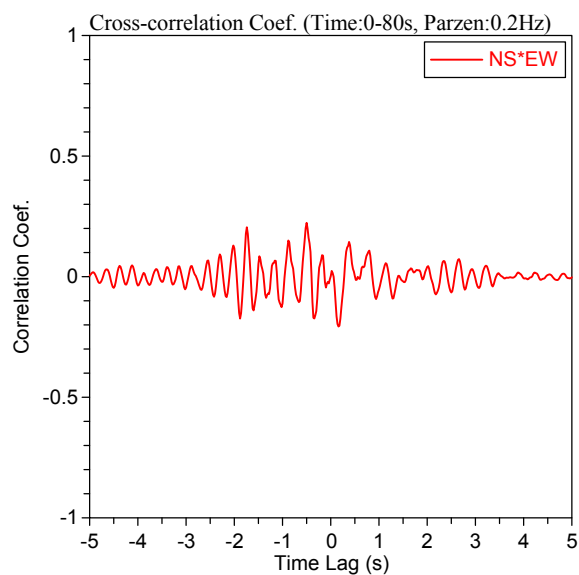


Figura I.20e. Functia de inter-corelatie normalizata pentru perechea de miscari pe cele doua directii

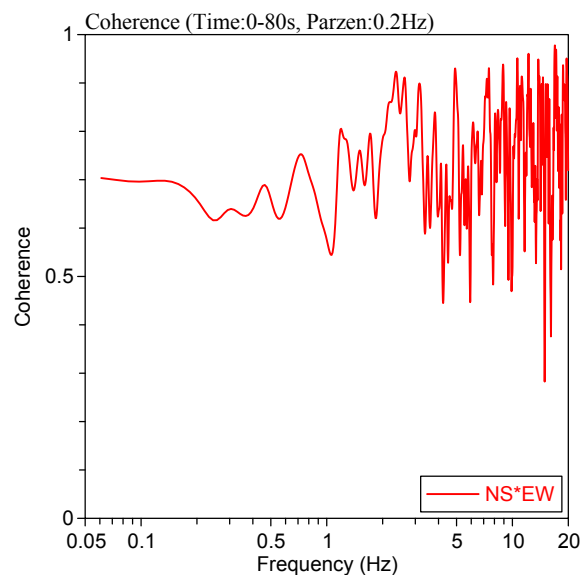


Figura I.20f. Functia de coerenta pentru perechea de miscari pe cele doua directii

Bibliografie:

1. Ang, A. H.-S., Tang, W. H., *Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2007
2. Devlin, K., *Partida neterminata*, Editura Humanitas, 2010
3. Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics* – fourth edition, John Wiley & Sons, 1979
4. Lungu, D. & Ghiocel, D., *Metode probabilistice in calculul constructiilor*, Editura Tehnica, 1982
5. Simiu, E., Scanlan, R. H., *Wind Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design*, 3rd Edition, Wiley-Interscience, 1996
6. Vacareanu, R., Aldea, A., Lungu, D., *Structural Reliability and Risk Analysis*, Editura Conspress, 2007
7. Kashima, T., *ViewWave* (versiunea 1.37), Building Research Institute, Tsukuba, Japan

II. ANALIZA SI EVALUAREA FIABILITATII STRUCTURILOR

II.1. Introducere

Prin fiabilitate structurala se intelege probabilitatea ca sistemul structural sau elementele sale sa satisfaca, in conditii specificate, cel putin pentru o perioada de timp data, criteriile de performanta stabilite la proiectare. In proiectarea structurala, criteriile de performanta sunt asociate unor stari limita. Cu alte cuvinte, fiabilitatea structurala exprima probabilitatea de nedepasire a unei stari limita considerate la proiectare, pentru sistemul structural sau pentru elementele sale.

Studiul fiabilitatii structurilor se ocupa cu estimarea si predictia probabilitatii de depasire a unor stari limita pentru un sistem structural sau pentru elementele sale. In particular, studiul sigurantei structurilor estimeaza probabilitatea de depasire a starii limita ultime.

Obiectul fiabilitatii structurilor (si a sigurantei structurilor, in particular) este de a dezvolta criterii si proceduri de asigurare (sau de verificare), cu un grad inalt de incredere, ca structurile proiectate si construite conform specificatiilor tehnice in vigoare se vor comporta acceptabil din punct de vedere al sigurantei si functionalitatii acestora.

Necesitatea analizei de fiabilitate structurala apare din recunoasterea prezentei incertitudinilor in definirea, intelegerea, modelarea si predictia comportarii obiectului proiectat. Obiectivul analizei de fiabilitate este asigurarea unui nivel minim de fiabilitate predefinit (sau tinta).

Siguranta absoluta nu poate fi garantata din cauza [2], [6]:

- impredictibilitatii, cu suficienta acuratete, a cerintelor pentru sistemul structural;
- inabilitatii de a obtine si de a exprima, cu suficienta acuratete, proprietatile fizice, geometrice si mecanice ale sistemului structural;
- folosirii ipotezelor simplificatoare in predictia comportarii sistemului structural;
- limitarilor metodelor numerice folosite;
- factorului uman (erori si omisiuni).

Cu toate acestea, probabilitatea de a avea o performanta (comportare) inacceptabila poate fi limitata prin folosirea conceptelor si metodelor fiabilitatii structurale. In consecinta, probabilitatea de cedare (probabilitatea ca sistemul structural sau elementele acestuia sa nu satisfaca unele criterii de performanta) trebuie sa fie mai mica sau cel mult egala decat o valoare de referinta numita probabilitate „tinta” de cedare [1], [6].

Conform *CIRIA* (Construction Industry Research and Information Association) 1977, valorile tinta recomandate pentru probabilitatile nominale de cedare sunt date de relatia [6]

$$P_{fN}^* = \frac{10^{-4} \cdot \mu \cdot t_L}{n} \quad (\text{II.1}),$$

unde:

t_L – este durata proiectata de viata a structurii (constructiei), in ani;

n – este numarul mediu de persoane ce folosesc constructia;

μ – este factorul de importanta, egal cu:

- $5 \cdot 10^{-3}$, pentru locuri cu aglomerari mari de persoane si pentru baraje;

- $5 \cdot 10^{-2}$, pentru cladiri civile, industriale si agricole.

EN 1990 – Basis of Structural Design stabileste pentru cladiri valori tinta ale indicelui de fiabilitate, β_i astfel:

- pentru starea limita ultima, $\beta_i = 4,7$ intr-un an si $\beta_i = 3,8$ in 50 de ani;
- pentru starea limita de serviciu, $\beta_i = 2,9$ intr-un an si $\beta_i = 1,5$ in 50 de ani.

II.2. Functia de fiabilitate

Fie T timpul pana la cedare (pana la depasirea starii limita considerate); T este o variabila aleatoare. Functia de fiabilitate $R_T(t)$ se defineste ca probabilitatea ca sistemul structural sau elementele sale sa se comporte in conformitate cu un criteriu de performanta specificat cel putin pe durata t [2]:

$$R_T(t) = P[T > t] = \int_t^{\infty} f_T(t) dt = 1 - \int_0^t f_T(t) dt = 1 - F_T(t) \quad (\text{II.2}),$$

unde $f_T(t)$ este densitatea de repartitie si $F_T(t)$ este functia de repartitie a timpului pana la cedare.

Valoarea medie a lui T (durata asteptata de viata) este [2]:

$$\begin{aligned} \mu_T &= \int_0^{\infty} t \cdot f_T(t) dt = t \cdot F_T(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F_T(t) dt = t(1 - R_T(t)) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (1 - R_T(t)) dt = \\ &= t \Big|_0^{\infty} - t \cdot R_T(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} R_T(t) dt = \int_0^{\infty} R_T(t) dt - t \cdot R_T(t) \Big|_0^{\infty} = \int_0^{\infty} R_T(t) dt \end{aligned} \quad (\text{II.3}).$$

Rata de cedare variaza in raport cu timpul si se masoara prin functia de hazard, $h_T(t)$, definita ca probabilitatea ca sistemul sau elementele acestuia va (vor) ceda in urmatorul interval de timp Δt , cu conditia ca acesta (acestea) sa nu cedeze pana la timpul t [2]:

$$h_T(t) = P[t \leq T < t + \Delta t | T > t] = \frac{P[t \leq T < t + \Delta t]}{P[T > t]} \quad (\text{II.4}).$$

Daca se impart atat numaratorul cat si numitorul la Δt si se determina limitele

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t]}{\Delta t} = f_T(t) \quad (\text{II.5})$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[T > t]}{\Delta t} = R_T(t) \quad (\text{II.6})$$

unde $f_T(t)$ este densitatea de repartitie a lui T si $R_T(t)$ este functia de fiabilitate; functia de hazard in forma sa finala este, Figura II.1 [2]:

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} \quad (\text{II.7}).$$

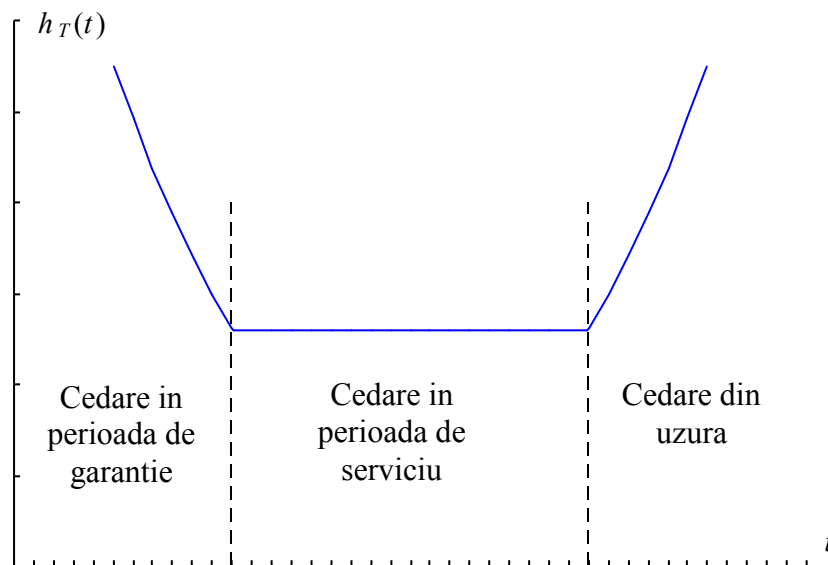


Figura II.1. Functia de hazard

II.3. Etape ale analizei de fiabilitate

Efectuarea analizelor de fiabilitate structurala necesita parcurgerea urmatoarelor etape [1], [2]:

- descrierea probabilistica a actiunilor (incarcarilor) asteptate pe durata de viata a structurii;
- descrierea probabilistica a proprietatilor geometrice, fizice si mecanice ale structurii;
- descrierea fizica a starilor limita si stabilirea criteriilor de performanta;

- descrierea matematica a starilor limita (stabilirea relatiilor incarcare-raspuns structural);
- estimarea probabilitatilor de depasire a diferitelor stari limita pe baza informatiilor precedente folosind instrumente statistice si probabilistice;
- stabilirea probabilitatii de cedare tinta si compararea valorilor obtinute cu aceasta.

Abordarea descrisa mai sus este rareori aplicabila in practica fara compromisuri si simplificari; din acest motiv rezultatele analizelor de fiabilitate structurala reprezinta probabilitati nominale de cedare ce pot diferi de probabilitatile reale de cedare. Totusi, daca abordarile folosite in analiza fiabilitatii a doua proiecte diferite sunt identice, putem considera ca rapoartele dintre probabilitatile reale si nominale pentru cele doua proiecte sunt egale [6]

$$\left(\frac{P_{f,real}}{P_{f,No\ min\ al}} \right)_{Pr\ oiect\ 1} = \left(\frac{P_{f,real}}{P_{f,No\ min\ al}} \right)_{Pr\ oiect\ 2} \quad (II.8)$$

si, in consecinta, cele doua proiecte pot fi comparate din punct de vedere al fiabilitatii structurale pe baza probabilitatilor nominale de cedare.

Probabilitatea nominala de cedare nu include si posibilitatea producerii erorilor umane. Pentru a include in probabilitatea de cedare si eroarea umana se apeleaza la formula probabilitatilor totale [6]

$$P_f = (1 - P_E) P_{f, No\ min\ al} + P_E P_1 \quad (II.9)$$

unde:

P_E – este probabilitatea de producere a erorii umane;

P_1 – este probabilitatea de cedare a structurii conditionata de producerea erorii umane.

In analizele de fiabilitate structurala, marimile ce sunt constante in timp, sau marimile a caror variatie in timp urmeaza o lege determinista, sunt modelate ca variabile aleatoare. Marimile ce variaza continuu si aleator in raport cu timpul sunt modelate ca procese stochastice (aleatoare).

II.4. Problema de baza a fiabilitatii structurilor

Se considera doua variabile aleatoare:

- R – rezistenta sectionala, ce descrie capacitatea elementului structural;
- S – efectul sectional al incarcarii, ce descrie cerinta impusa de incarcare asupra elementului structural.

Obiectivul analizelor de fiabilitate este de a asigura, cu o probabilitate suficient de mare, producerea evenimentului $[R > S]$ pe durata de viata a structurii (sau pe o durata de timp specificata). Aceasta asigurare este posibila doar in termeni probabilistici; astfel, se determina:

- $P [R \geq S] = Re$ – fiabilitatea structurala;
- $P [R < S] = P_f$ – probabilitatea de cedare structurala.

Daca se cunosc repartitiile de probabilitate a celor doua variabile aleatoare, R si S si se face ipoteza ca cele doua variabile aleatoare sunt independente statistic, probabilitatea de cedare se poate determina analitic cu relatia de convolutie in raport cu s [1], [4], [5], [6]

$$P_f = \sum_{\text{toate valorile } s} P[R \leq s] \cdot P[s \leq S < s + ds] = \int_0^{\infty} F_R(s) \cdot f_S(s) ds \quad (\text{II.10})$$

sau cu relatia de convolutie in raport cu r

$$P_f = \sum_{\text{toate valorile } r} P[S > r] \cdot P[r \leq R < r + dr] = \int_0^{\infty} [1 - F_S(r)] \cdot f_R(r) dr \quad (\text{II.11}).$$

In Figura II.2 este prezentat un exemplu de pozitionare a densitatilor de repartitie pentru cele doua variabile aleatoare, R si S . Zona de suprapunere a densitatilor de repartitie este proportionala cu probabilitatea de cedare. Aceasta creste daca cele doua densitati de repartitie se apropie si scade daca acestea se departeaza. Pozitia relativa a celor doua curbe este determinata de mediile, Figura II.3 si de dispersiile (sau abaterile standard), Figura II.4 celor doua variabile aleatoare. Astfel, pozitia relativa a celor doua densitati de repartitie poate fi masurata prin:

- coeficientul central de siguranta, $\frac{\mu_R}{\mu_S}$; cresterea coeficientului central produce micsorarea zonei de suprapunere si scaderea probabilitatii de cedare;
- marja de siguranta, $\mu_R - \mu_S$; cresterea marjei de siguranta produce micsorarea zonei de suprapunere si scaderea probabilitatii de cedare.

In concluzie, probabilitatea de cedare, P_f depinde de coeficientul central de siguranta (sau de marja de siguranta) si de dispersiile (abaterile standard a) celor doua variabile aleatoare. In consecinta, orice masura a sigurantei sau fiabilitatii trebuie sa depinda de pozitia relativa a mediilor celor doua variabile aleatoare R si S si de dispersiile acestora. Teoretic, probabilitatea de cedare depinde si de forma celor doua densitati de repartitie (de tipul acestora); totusi, in practica, informatia este limitata si se reduce la primele doua momente ale lui R si S .

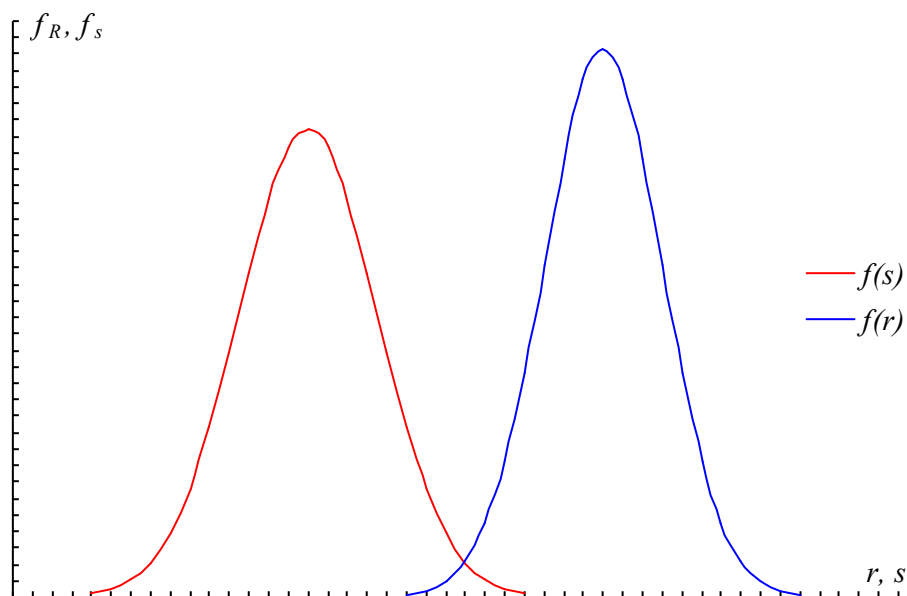


Figura II.2. Densitatile de repartitie ale lui R si S

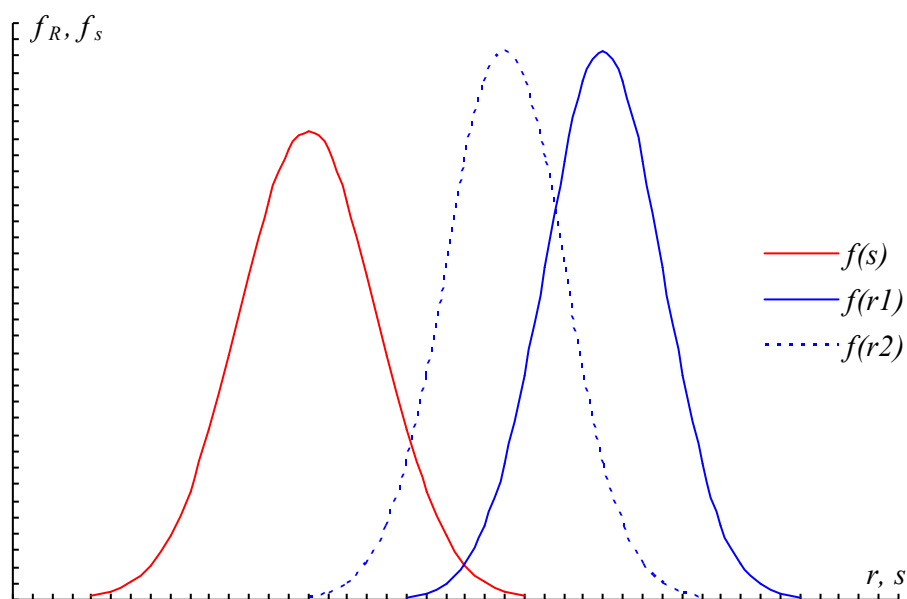


Figura II.3. Densitatile de repartitie ale lui R_1, R_2 si S ; se observa cresterea zonei de suprapunere odata cu scaderea mediei variabilei R_2 fata de media variabilei R_1

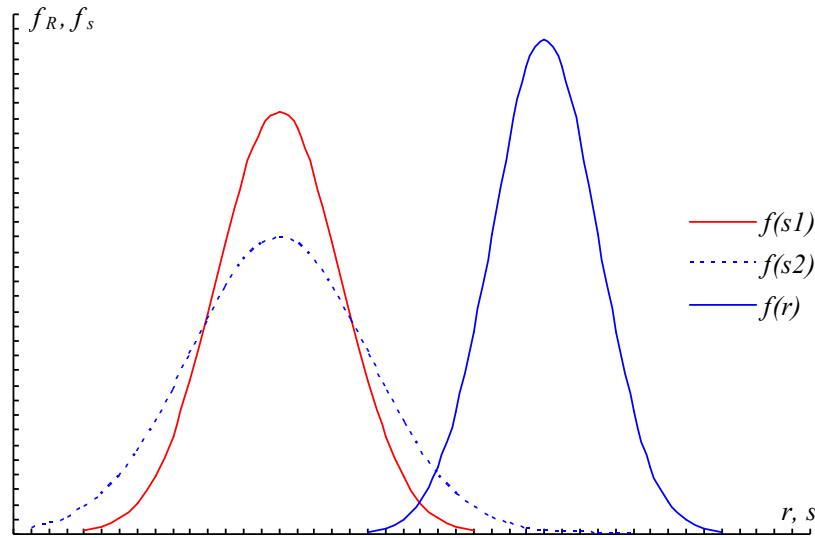


Figura II.4. Densitatile de repartitie ale lui S_1 , S_2 si R ; se observa cresterea zonei de suprapunere odata cu cresterea dispersiei variabilei S_2 fata de dispersia variabilei S_1

Exemplul 1: Se considera cele doua variabile aleatoare R si S de tip normal si independente statistic: $R \sim N(\mu_R, \sigma_R)$ si $S \sim N(\mu_S, \sigma_S)$. Se defineste marja de siguranta, $M = R - S$, Figura II.5. Acesta este tot o variabila aleatoare de tip normal, $M \sim N(\mu_M, \sigma_M)$, Figura II.6 avand primele doua momente date de [1]:

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (II.12)$$

$$\sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (II.13).$$

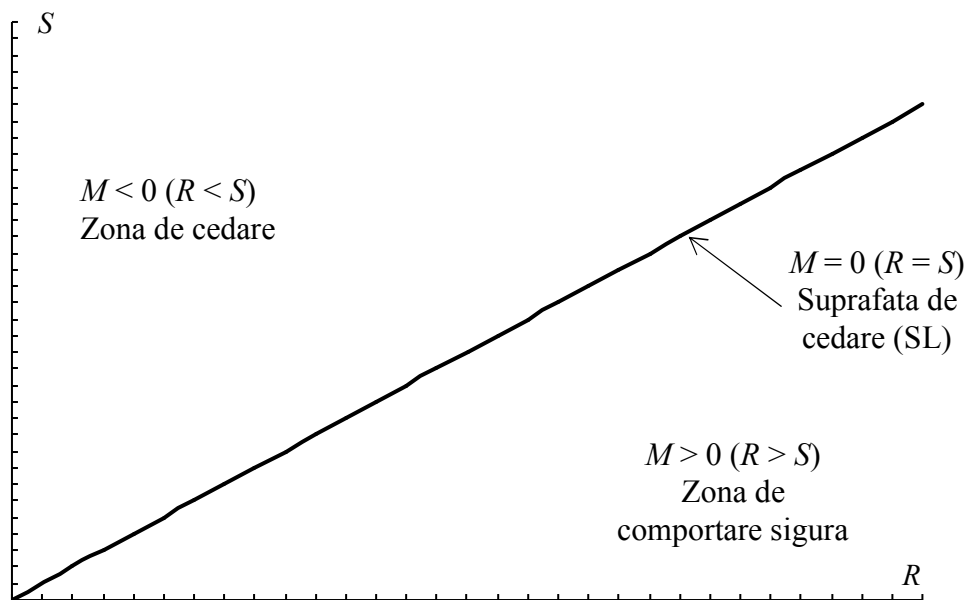


Figura II.5. Marja de siguranta, $M = R - S$

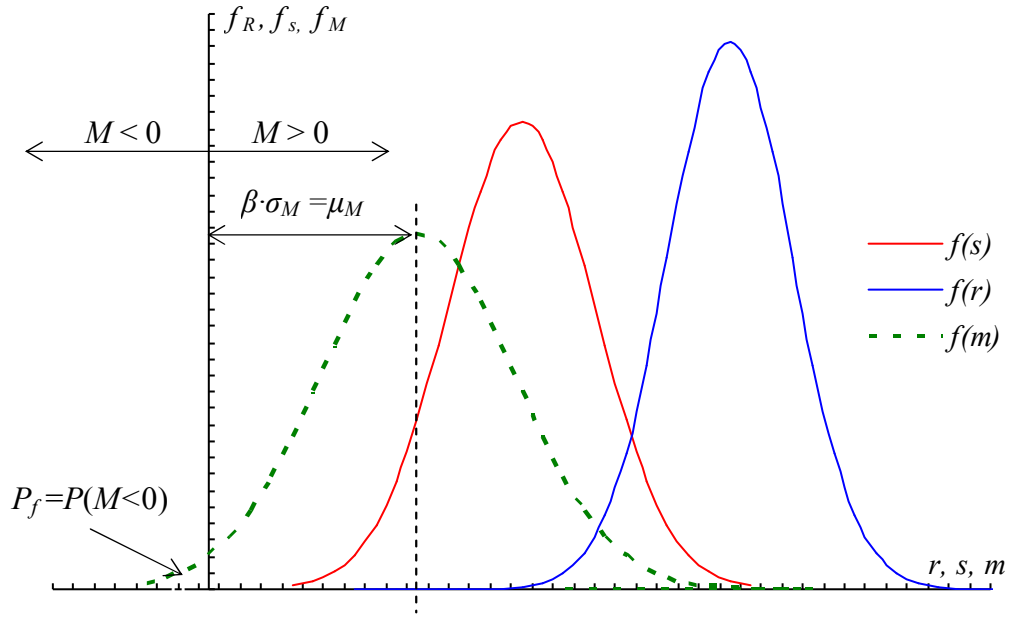


Figura II.6. Densitatile de repartitie ale lui S , R si M

Se definește variabila aleatoare redusă, M' de tip normal, având media zero și abaterea standard 1, $M' \sim N(0,1)$:

$$M' = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (\text{II.14}).$$

Probabilitatea de cedare, P_f se determină cu relația

$$P_f = P(M \leq 0) = F_M(0) = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (\text{II.15}),$$

unde Φ este funcția de repartitie normală standard.

Se definește indicele de fiabilitate, β

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (\text{II.16})$$

care este o măsură, în unități de abatere standard a lui M , a distanței de la media acestei variabile aleatoare până la originea sistemului de axe ($M = 0$).

Din combinarea relațiilor (II.15) și (II.16) rezultă că:

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (\text{II.17}).$$

Relația (II.17) reprezintă legătura directă dintre indicele de fiabilitate și probabilitatea de cedare, Tabel II.1; relația (II.17) este exactă pentru determinarea probabilității de cedare dacă R și S sunt

variabile aleatoare normale. Daca acestea nu sunt de tip normal, este corect sa ne referim doar la marimea indicelui de fiabilitate. De asemenea, din relatia (II.17) rezulta ca fiabilitatea structurala este:

$$Re = 1 - P_f = \Phi(\beta) \quad (II.18).$$

Tabel II.1. Corespondenta intre indicele de fiabilitate, β si probabilitatea de cedare, P_f pentru R si S variabile aleatoare normale

β	0,00	1,28	1,50	2,33	2,90	3,09
P_f	5,0E-01	1,0E-01	6,7E-02	1,0E-02	1,9E-03	1,0E-03

β	3,72	3,80	4,26	4,70	4,75	5,20
P_f	1,0E-04	7,2E-05	1,0E-05	1,3E-06	1,0E-06	1,0E-07

Exemplul 2: Se considera cele doua variabile aleatoare R si S de tip lognormal si independente statistic: $R \sim \text{LN}(\lambda_R, \xi_R)$ si $S \sim \text{LN}(\lambda_S, \xi_S)$. Parametrii repartitiilor lognormale alui lui R si S sunt:

$$\lambda_{R(S)} = \mu_{\ln R(S)} = \ln \frac{\mu_{R(S)}}{\sqrt{1 + V_{R(S)}^2}} \quad (II.19)$$

$$\xi_{R(S)} = \sigma_{\ln R(S)} = \sqrt{\ln(1 + V_{R(S)}^2)} \quad (II.20)$$

unde $V_{R(S)}$ este coeficientul de variatie al variabilei aleatoare $R(S)$.

Se defineste coeficientul de siguranta, $\theta = \frac{R}{S}$. Acesta este tot o variabila aleatoare de tip lognormal, $\theta \sim \text{LN}(\lambda_\theta, \xi_\theta)$, cu parametrii repartitiei dati de [1]:

$$\lambda_\theta = \lambda_R - \lambda_S \quad (II.21)$$

$$\xi_\theta^2 = \xi_R^2 + \xi_S^2 \quad (II.22).$$

Valoarea mediana r_m (s_m) a variabilei aleatoare R (S) este determinata cu relatia de calcul $r_m = e^{\mu_{\ln R}} = e^{\lambda_R}$ ($s_m = e^{\mu_{\ln S}} = e^{\lambda_S}$). Daca in relatia (II.19) se folosesc valorile mediane r_m (s_m) in locul valorilor medii μ_R (μ_S), aceasta devine

$$\lambda_{R(S)} = \ln r_m(s_m) \quad (II.23)$$

si relatia (II.21) ia forma

$$\lambda_{\theta} = \lambda_R - \lambda_S \quad (II.24)$$

si
$$\lambda_{\theta} = \ln r_m - \ln s_m = \ln \frac{r_m}{s_m} \quad (II.25)$$

in care raportul $\frac{r_m}{s_m}$ este coeficientul de siguranta median.

Variabila aleatoare $\ln \theta$ este normala cu media λ_{θ} si abaterea standard ξ_{θ} ; prin transformarea

$$\frac{\ln \theta - \lambda_{\theta}}{\xi_{\theta}} \quad (II.26)$$

se obtine o noua variabila aleatoare de tip normal cu media 0 si abaterea standard 1, $\sim N(0,1)$. Probabilitatea de cedare este egala cu:

$$P_f = P[\theta \leq 1] = F_{\theta}(1) = \Phi\left(\frac{\ln 1 - \lambda_{\theta}}{\xi_{\theta}}\right) = \Phi\left(\frac{-\lambda_{\theta}}{\xi_{\theta}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\lambda_{\theta}}{\xi_{\theta}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln \frac{r_m}{s_m}}{\sqrt{\xi_R^2 + \xi_S^2}}\right) \quad (II.27).$$

Prin analogie cu exemplul 1, indicele de fiabilitate β este in acest caz:

$$\beta = \frac{\lambda_{\theta}}{\xi_{\theta}} = \frac{\ln \frac{r_m}{s_m}}{\sqrt{\xi_R^2 + \xi_S^2}} \quad (II.28).$$

Daca folosim aproximariile $r_m \approx \mu_R$ ($s_m \approx \mu_S$) si $\xi_R \approx V_R$ ($\xi_S \approx V_S$), se obtine urmatoarea relatie aproximativa pentru indicele de fiabilitate, β ce depinde de primele doua momente ale acestora:

$$\beta = \frac{\ln \mu_R - \ln \mu_S}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} \quad (II.29).$$

Pentru a generaliza abordarea si rezultatele din exemplele precedente, se considera ca variabilele aleatoare R si S sunt functii de alte variabile aleatoare, numite variabile aleatoare de baza; in consecinta, problema de baza a fiabilitatii structurale trebuie reformulata in termenii acestor variabile. In acest scop, se introduce functia de performanta (sau de stare), ce descrie performanta structurii sau a elementelor structurale in a respecta criteriile de proiectare (performanta de a indeplini cerintele de proiectare). Astfel, conform exemplului 1, functia de performanta este definita ca: $M = R - S$; dar, R si S sunt functii de variabilele aleatoare de baza $X_1, X_2, \dots, X_n$; deci, functia de performanta se transforma in spatiul variabilelor aleatoare de baza: $g = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Functia de performanta in spatiul variabilelor aleatoare de baza se mai poate scrie $g(\mathbf{X})$, unde $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ este vectorul variabilelor aleatoare de baza ale structurii.

Functia $g(\mathbf{X})$ determina performanta sau starea structurii, astfel [1], [5], [6]:

$$g(\mathbf{X}) = \begin{cases} > 0, \text{ comportare sigura} \\ = 0, \text{ stare limita} \\ < 0, \text{ cedare} \end{cases} \quad (\text{II.30}).$$

Din punct de vedere geometric, ecuatia de stare limita, $g(\mathbf{X}) = 0$ este un punct, o curba, o suprafata sau o hipersuprafata in spatiul cu 1, 2, 3 sau n dimensiuni, numita suprafata de cedare. Probabilitatea de cedare este egala cu probabilitatea ca functia de performanta sa aiba valori mai mici decat zero [1], [5], [6]:

$$P_f = P[g(\mathbf{X}) < 0] = P[g(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0] = \int \int \dots \int_{\text{pentru } g(\cdot) < 0} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{II.31})$$

unde $f_{\mathbf{X}}$ este densitatea de repartitie a vectorului aleator $\mathbf{X}$ si integrala se calculeaza in regiunea in care $g(\cdot) < 0$. In mod evident, fiabilitatea (probabilitatea de comportare sigura) se determina cu relatia:

$$Re = P[g(\mathbf{X}) \geq 0] = \int \int \dots \int_{\text{pentru } g(\cdot) \geq 0} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{II.32}).$$

In cele mai multe cazuri, din cauza necunoasterii densitatii de repartitie a vectorului aleator $\mathbf{X}$, calculul integralelor (II.31) si (II.32) este o sarcina nerealizabila. Din acest motiv, in analiza fiabilitatii structurilor, s-au dezvoltat metode de ordin I, *FORM* (First Order Reliability Methods) si metode avansate de ordin I.

II.5. Metoda de ordin I cu momente de ordin II

In literatura tehnica de limba engleza aceasta metoda poarta acronimul de *FOSM* (First Order Second Moment). Metoda este de ordinul I deoarece functia de performanta se dezvoltă in serie Taylor si se pastreaza doar termenul liber si cel de ordinul I (termenul liniar). Metoda utilizeaza primele doua momente (media si dispersia) ale variabilelor aleatoare de baza. Dezvoltarea in serie Taylor a unei functii $f(x)$ in jurul unui punct a conduce la relatia [1], [2]:

$$f(x) \cong f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots \quad (\text{II.33})$$

Dezvoltarea in serie Taylor de ordinul I a unei functii de mai multe variabile, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ in jurul unui punct $\mathbf{a} = \boldsymbol{\mu} = (\mu_{X1}, \mu_{X2}, \dots, \mu_{Xn})$ conduce la relatia [1], [2]:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) \cong g(\mu_{X1}, \mu_{X2}, \dots, \mu_{Xn}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\boldsymbol{\mu}} \cdot (X_i - \mu_{X_i}) + \dots \quad (\text{II.34}).$$

Din relatia (II.34), folosind definitiile mediei si dispersiei, se obtin primele doua momente ale functiei $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ [1], [2]:

$$\mu_g \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (II.35)$$

$$\sigma_g^2 \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\mu} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right)_{\mu} \cdot Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\mu} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right)_{\mu} \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j} \quad (II.36).$$

In relatia (II.36) covarianta este data de relatia

$$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] = E[X_i \cdot X_j] - \mu_{X_i} \cdot \mu_{X_j} \quad (II.37)$$

si coeficientul de corelatie este:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j}} \quad (II.38).$$

Daca variabilele aleatoare X_i si X_j sunt independente statistic, atunci

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } i = j \\ 0, & \text{pentru } i \neq j \end{cases} \quad (II.39)$$

si dispersia este [1], [2], [4], [8]:

$$\sigma_g^2 \cong \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\mu}^2 \cdot \sigma_{X_i}^2 \quad (II.40).$$

Indicele de fiabilitate, β este definit ca raportul intre media si abaterea standard a functiei de performanta structurala [1], [5]:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (II.41).$$

Daca functia de performanta, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ are o repartitie normala, atunci este valabila relatia (II.17).

Dezvoltarea functiei in jurul punctului de medie este o practica obisnuita, dar nu exista niciun motiv pentru a proceda doar in acest mod. Alegerea punctului in jurul caruia se va dezvolta functia afecteaza estimatiile indicelui de fiabilitate, β , asa cum se arata si in exemplul urmator.

Exemplu: Fie functia de performanta $g(\mathbf{X}) = X_1 \cdot X_2 - 2X_3$, unde X_1 , X_2 si X_3 sunt variabile aleatoare independente avand mediile μ_{X1} , μ_{X2} si μ_{X3} si dispersiile $\sigma_{X1} = \sigma_{X2} = \sigma_{X3} = \sigma_X$.

Derivatele partiale ale functiei g in raport cu cele trei variabile sunt:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_1} \right) = X_2, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial X_2} \right) = X_1, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial X_3} \right) = -2.$$

Fie $a = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \mu_{X_3})$. In acest caz, conform relatiei (II.35), media functiei de performanta este

$$\mu_g = \mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2} - 2\mu_{X_3}$$

si dispersia sa (conform relatiei (II.40)) este

$$\sigma_g^2 = \mu_{X_2}^2 \cdot \sigma_{X_1}^2 + \mu_{X_1}^2 \cdot \sigma_{X_2}^2 + 4\sigma_{X_3}^2 = \sigma_X^2 (\mu_{X_1}^2 + \mu_{X_2}^2 + 4).$$

Indicele de fiabilitate rezulta (relatia II.41):

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2} - 2\mu_{X_3}}{\sigma_X \sqrt{\mu_{X_1}^2 + \mu_{X_2}^2 + 4}}.$$

Daca se considera $a = \left(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \frac{\mu_{X_3}}{2} \right)$, conform relatiei (II.35), media functiei de performanta este

$$\mu_g = \mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2} - \mu_{X_3}$$

si dispersia sa (conform relatiei (II.40)) este

$$\sigma_g^2 = \mu_{X_2}^2 \cdot \sigma_{X_1}^2 + \mu_{X_1}^2 \cdot \sigma_{X_2}^2 + 4\sigma_{X_3}^2 = \sigma_X^2 (\mu_{X_1}^2 + \mu_{X_2}^2 + 4).$$

Indicele de fiabilitate rezulta (relatia II.41):

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2} - \mu_{X_3}}{\sigma_X \sqrt{\mu_{X_1}^2 + \mu_{X_2}^2 + 4}}.$$

Se observa ca indicele de fiabilitate difera in functie de alegerea punctului in jurul caruia se face dezvoltarea in serie Taylor a functiei de performanta, ceea ce contravine conceptului clar de unicitate a indicelui de fiabilitate pentru un element structural dat.

In Figura II.7 se prezinta un exemplu de functie de performanta liniarizata prin dezvoltarea sa in serie Taylor in jurul punctului de medie, (μ_{X1}, μ_{X2}) si in jurul unui punct ce apartine suprafetei de cedare, (x_1^*, x_2^*) . Se observa ca se obtin doua functii liniarizate de performanta notate cu $g_L(X)$. Si din aceasta reprezentare se observa caracterul arbitrar al alegerii punctului de medie ca punct in jurul caruia se face dezvoltarea in serie Taylor. De ce mai multe ori punctul de medie nici nu apartine functiei de performanta, $g(X)$.

Metoda de ordin I cu momente de ordin II are urmatoarele dezavantaje [1], [2], [5], [6]:

- functia de performanta $g(X)$ se liniarizeaza pentru valorile medii ale variabilelor aleatoare de baza; daca $g(X)$ este neliniara, se pot introduce erori semnificative prin neglijarea termenilor de ordin superior;
- metoda poate conduce la rezultate diferite daca, pentru aceeaasi problema, se folosesc formulari mecanice diferite ale functiei de performanta (de ex., tensiuni vs. eforturi sectionale);

- metoda produce valori ale indicelui de fiabilitate care nu sunt invariante la schimbarea punctului de liniarizare;
- metoda ignora complet informatia privind repartitia de probabilitate pentru variabilele aleatoare de baza.

Din aceste motive, metoda este imbunatatita prin dezvoltarea de metode avansate.

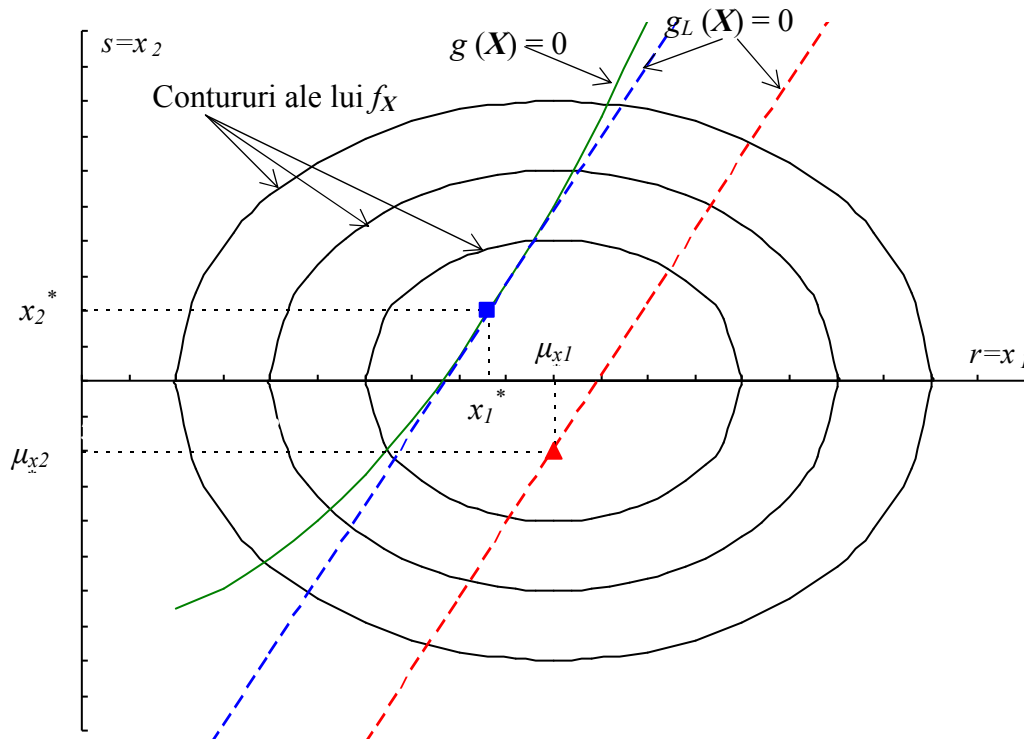


Figura II.7. Liniarizarea functiei de performanta $g(\mathbf{X})$ prin dezvoltarea in serie Taylor in jurul punctului de coordonate (μ_{x1}, μ_{x2}) – triunghiul rosu-, si in jurul punctului de coordonate (x_1^*, x_2^*) – dreptunghiul albastru; $g_L(\mathbf{X})$ este functia de performanta liniarizata

II.6. Metode avansate pentru analiza fiabilitatii structurilor in teoria FORM

II.6.1. Cazul variabilelor normale necorelate

Pentru a obtine o marime invarianta a indicelui de fiabilitate, β , un prim pas (dar nu suficient) este de a transforma toate variabilele aleatoare normale necorelate, X_i , in variabile reduse standard, $X_i' \sim N(0, 1)$:

$$X_i' = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (\text{II.42}).$$

Relatia (II.42) se numeste transformarea Hasofer-Lind si are urmatoarele consecinte [1], [2]:

- unitatea de masura in orice directie a spatiului X' este abaterea standard a variabilei reduce standard, $\sigma_{X_i'} = 1$;
- densitatea de repartitie multivariata, $f_X(x_1', x_2', \dots, x_n')$ in spatiul X' este de tip normal standard;
- functia de performanta $g(X)$ se transforma in $g(X')$, prin transformarea functiei originale, $g(X)$ in spatiul X' al variabilelor aleatoare reduce.

Transformarea Hasofer-Lind poate fi efectuata daca variabilele aleatoare de baza, X_i sunt normale si necorelate (sau independente liniar). Daca $\rho_{ij} < 0,2$, sau daca $F_{X_i X_j} > 0,99$ si $\rho_{ij} < 0,7$, se poate ignora corelatia si variabilele aleatoare de baza pot fi tratate ca independente.

Pentru a ilustra modul de operare al transformarii Hasofer-Lind, se considera functia de performanta $M = R - S$ (problema marjei de siguranta). Folosind transformarea Hasofer-Lind, se definesc variabilele aleatoare reduce standard: $R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$ si $S' = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$. Marja de siguranta, $R - S$, se transforma in spatiul variabilelor aleatoare reduce si devine:

$$M' = \mu_R + R'\sigma_R - \mu_S - S'\sigma_S \quad (\text{II.43}).$$

Prin prelucrarea functiei de performanta in spatiul variabilelor aleatoare reduce, se obtine urmatoarea relatie intre R' si S' ce descrie suprafata de cedare, Figura II.8:

$$S' = R' \frac{\sigma_R}{\sigma_S} + \frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \quad (\text{II.44})$$

ceea ce reprezinta o dreapta cu panta $\frac{\sigma_R}{\sigma_S}$ si cu taietura $\frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_S}$ pe axa s (s').

In Figura II.8 se duce perpendiculara OA pe latura AB . Unghiul AOB este egal cu unghiul α pe care il face dreapta $M' = 0$ cu axa Or' . Rezulta ca lungimea AB este egala cu $x = d \cdot \tan \alpha = d \cdot \frac{\sigma_R}{\sigma_S}$.

Aplicand teorema lui Pitagora in triunghiul OAB se obtine distanta de la originea sistemului de axe $r's'$ la suprafata de cedare, d [1], [6]:

$$d^2 + d^2 \cdot \tan^2 \alpha = \left(\frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \right)^2 \Rightarrow d = \frac{\frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_S}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_R^2}{\sigma_S^2}}} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (\text{II.45}).$$

Distanța de la originea spațiului variabilelor aleatoare reduse $r's'$ la suprafața de cedare ($M'=0$) este o măsură a fiabilității structurale; dacă distanța d crește, zona de cedare ($M' < 0$) scade și probabilitatea de cedare scade; la scăderea distanței d se mărește zona de cedare și probabilitatea de cedare crește. Se observă că, pentru cazul în care R și S sunt variabile aleatoare normale necorelate, distanța d este egală cu indicele de fiabilitate, β . În cadrul metodelor avansate de analiză a fiabilității structurilor în teoria *FORM*, măsură fiabilității (siguranței) prin indicele de fiabilitate, β se definește ca distanța minimă de la originea spațiului variabilelor aleatoare reduse la suprafața de cedare reprezentată în același spațiu, Figura II.9. Acest indice de fiabilitate se numește indice geometric sau indice Hasofer-Lind.

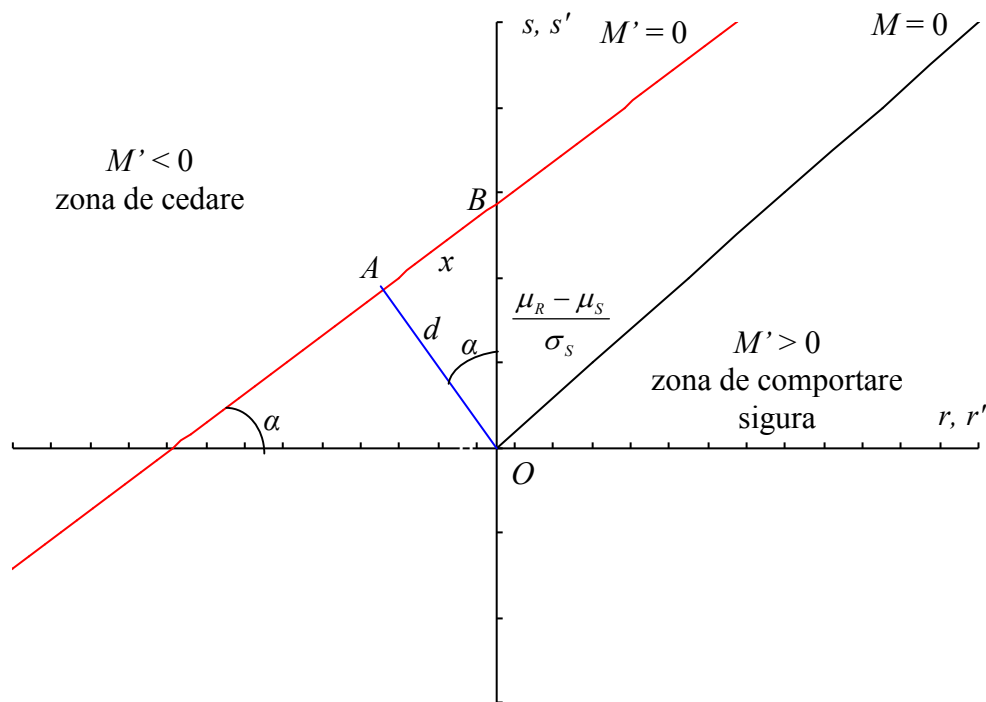


Figura II.8. Funcțiile de performanță $M = 0$ și $M' = 0$ în spațiul rs , respectiv $r's'$

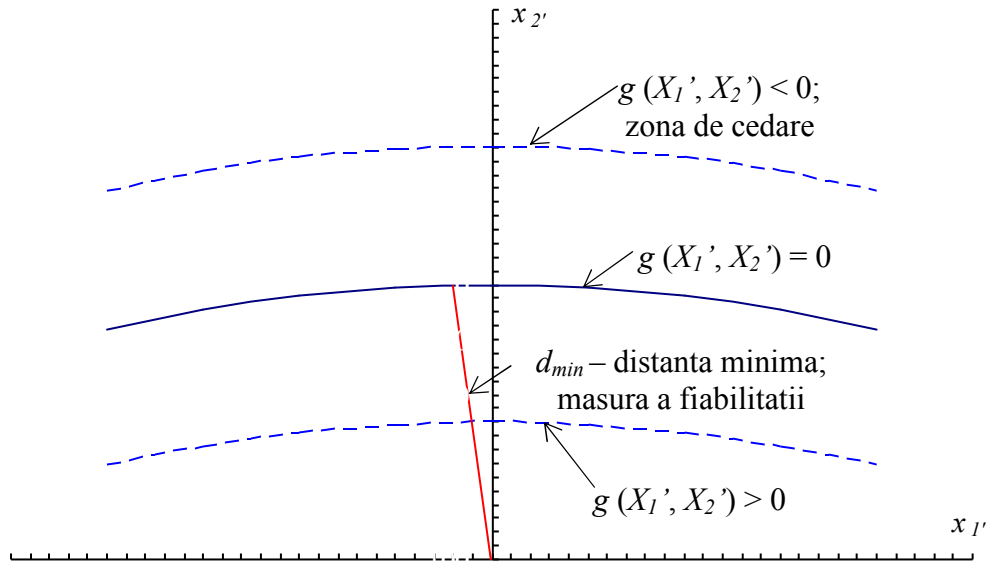


Figura II.9. Definirea indicelui geometric de fiabilitate

Revenind la hiperspatiul cu n dimensiuni al variabilelor aleatoare reduse, ecuatia ce descrie suprafata de cedare este [1], [2]:

$$g(\sigma_{x_1} \cdot X_1' + \mu_{x_1}, \sigma_{x_2} \cdot X_2' + \mu_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n} \cdot X_n' + \mu_{x_n}) = 0 \quad (\text{II.46}).$$

Pe masura ce suprafata de cedare (II.46) se apropie de originea hiperspatiului, zona de comportare sigura, $g(\mathbf{X}) > 0$, descreste si probabilitatea de cedare, P_f , creste; deci, pozitia suprafetei de cedare in raport cu originea spatiului variabilelor aleatoare reduse determina masura fiabilitatii. Pozitia suprafetei de cedare poate fi exprimata prin distanta minima de la hipersuprafata, $g(\mathbf{X}) = 0$ pana la originea hiperspatiului variabilelor aleatoare reduse; punctul de pe suprafata de cedare situat la distanta minima fata de origine este cel mai probabil punct de cedare (punct de verificare, punct de proiectare). Aceasta distanta minima este folosita ca masura a fiabilitatii structurale.

Pentru o intelegere mai buna a conceptelor, se considera cazul bidimensional:

$$g(\mathbf{X}) = X_1 - X_2 \quad (\text{II.47})$$

unde X_1 si X_2 sunt variabile aleatoare normale necorelate. Transformarea Hasofer-Lind va produce o densitate de repartitie bivariata standard, a carei contururi sunt reprezentate in Figura II.10. Functia de stare (de performanta) (II.47) se transforma in spatiul variabilelor aleatoare reduse sub forma, Figura II.10:

$$g(\mathbf{X}') = \sigma_{x_1} \cdot X_1' + \mu_{x_1} - \sigma_{x_2} \cdot X_2' - \mu_{x_2} \quad (\text{II.48}).$$

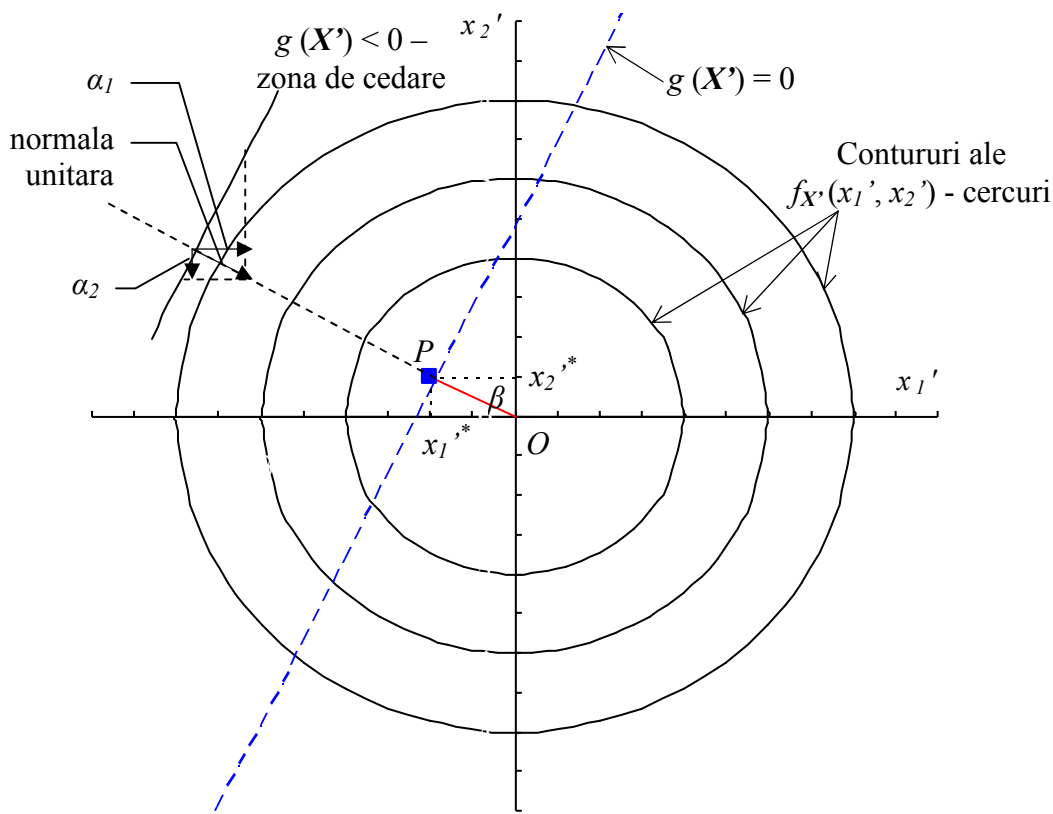


Figura II.10. Determinarea indicelui de fiabilitate, β în cazul bidimensional, $g(\mathbf{X}) = X_1 - X_2$

În Figura II.10, densitatea de repartiție bivariată normală standard, $f_{X'}(x_1', x_2')$ este reprezentată prin contururile sale ce formează cercuri. Suprafața de cedare, $g(X') = 0$ este reprezentată de o dreaptă; suprafața corespunzătoare condiției $g(X') < 0$ este zona de cedare și suprafața corespunzătoare condiției $g(X') > 0$ este zona de comportare sigură. Punctul de verificare, sau cel mai probabil punct de cedare este P , de coordonate $(x_1'^*, x_2'^*)$, corespunde distanței minime de la origine la suprafața de cedare; această distanță minimă măsoară indicele de fiabilitate geometric, β . Corespunzător dreptei OP , se determină normala unitară și cei doi cosinusi directori, α_1 și α_2 .

Variabilele aleatoare reduse sunt caracterizate de mediile $\mu_{X_1(2)} = 0$ și de abaterea standard $\sigma_{X_1(2)} = 1$. Abaterea standard este egală cu unitatea și în direcția OP ce definește indicele de fiabilitate, astfel încât distanța de la origine la suprafața de cedare devine egală cu indicele de fiabilitate, β . Acesta se măsoară perpendicular pe suprafața de cedare, $g(X') = 0$, deci corespunde distanței minime de la origine la suprafața de cedare. Având în vedere că variabilele aleatoare sunt normale, este valabilă relația între indicele de fiabilitate și probabilitatea de cedare, $P_f = \Phi(-\beta)$.

Conceptele descrise anterior pentru cazul bidimensional rămân valabile și în cazul general n -dimensional, în care sunt n variabile aleatoare normale necorelate de bază, $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Variabilele aleatoare de baza se transforma in spatiul n -dimensional standardizat, $\mathbf{X}'$ si suprafata de cedare este reprezentata de un hiper-plan, $g(\mathbf{X}') = 0$. Indicele de fiabilitate, β este definit de relatia [1], [2]

$$\beta = \min \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'^2} = \min(\mathbf{X}'^T \cdot \mathbf{X}')^{1/2} \quad (\text{II.49})$$

cu conditia ca [1], [2]

$$g(\mathbf{X}') = 0 \quad (\text{II.50}),$$

unde x_i' ($i=1, 2, \dots, n$) reprezinta coordonatele unui punct de pe suprafata de cedare si $\mathbf{X}'$ este vectorul coordonatelor punctului. Relatia (II.49) arata ca indicele de fiabilitate este dat de distanta minima intre originea hiperspatiului variabilelor aleatoare reduse si suprafata de cedare. Conditia (II.50) impune ca punctul de coordonate $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ fata de care se masoara, de la origine, indicele de fiabilitate, sa apartina suprafetei de cedare. Punctul pentru care cele doua relatii, (II.49) si (II.50), sunt satisfacute se numeste punct de proiectare (sau de verificare), se noteaza cu $\mathbf{X}^*$, si este proiectia originii hiperspatiului pe suprafata de cedare. Cea mai importanta contributie in marimea probabilitatii de cedare, P_f , provine din zona de cedare apropiata de punctul de proiectare, $\mathbf{X}^*$; deci, acest punct corespunde maximului densitatii de probabilitate (sau maximei verosimilitati) din domeniul de cedare.

Justificarea relatiilor (II.49) si (II.50) se face pe baza urmatoarei rationament [1], [2]:

- distanta, D , de la un punct de coordonate $\mathbf{X}' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ de pe suprafata de cedare, $g(\mathbf{X}') = 0$, pana la originea spatiului variabilelor aleatoare reduse este:

$$D = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'^2} = (\mathbf{X}'^T \cdot \mathbf{X}')^{1/2} \quad (\text{II.51});$$

- punctul de pe suprafata de cedare de coordonate $\mathbf{X}^* = (x_1'^*, x_2'^*, \dots, x_n'^*)$ ce este situat la distanta minima fata de originea spatiului variabilelor aleatoare reduse se obtine prin minimizarea functiei D cu conditia ca $g(\mathbf{X}^*) = 0$.

Abordarea se reduce la o problema de minimizare, $\min D$, cu o restrictie $g(\mathbf{X}^*) = 0$, din care rezulta coordonatele punctului de proiectare, $\mathbf{X}^*$ si indicele de fiabilitate, $\beta = \min D$. In continuare se prezinta procedura de determinare a indicelui de fiabilitate pentru functii liniare si neliniare de cedare (de performanta).

II.6.1.1. Functie liniara de cedare

In cazul in care functia de cedare, $g(\mathbf{X})$ este de tip liniar, se determina o relatie directa intre coordonatele punctului de verificare si indicele de fiabilitate. Cazul general este n -dimensional,

dar pentru o perspectiva geometrica intuitiva se poate face referire la Figura II.10 care priveste cazul bidimensional. Calculul coordonatelor punctului de verificare si a indicelui de fiabilitate se face in urmatoorii pasi [1], [5], [6]:

- se determina componentele, c_i ale vectorului normal, orientat spre originea spatiului n -dimensional, pe hiperplanul $g(\mathbf{X}') = 0$:

$$c_i = \lambda \frac{\partial g}{\partial X_i'} \quad (\text{II.52}),$$

unde λ este o constanta arbitrar aleasa;

- se determina lungimea totala, l a vectorului normal pe hiperplanul $g(\mathbf{X}') = 0$:

$$l = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \quad (\text{II.53});$$

- se determina cosinusii directori, α_i ai vectorului normal pe hiperplanul $g(\mathbf{X}') = 0$:

$$\alpha_i = \frac{c_i}{l} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^2}} \quad (\text{II.54});$$

- se determina coordonatele, $x_i'^*$ ale punctului de proiectare (de verificare):

$$x_i'^* = -\alpha_i \cdot \beta = -\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^2}} \cdot \beta \quad (\text{II.55});$$

in relatia (II.55) apare semnul minus deoarece cosinusii directori sunt componente ale normalei orientate spre origine iar coordonatele sunt orientate dinspre origine;

- se inlocuiesc coordonatele $x_i'^*$ in functia liniara de cedare, $g(\mathbf{X}')=0$, de unde se determina indicele de fiabilitate, β :

$$\beta = -\sum_{i=1}^n x_i'^* \cdot \alpha_i = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i'^* \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^2}} = -\mathbf{X}'^{*T} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{II.56}).$$

Pentru o functie liniara de cedare, care conduce la o suprafata liniara de cedare (un hiperplan in spatiul variabilelor aleatoare reduce), cosinusii directori nu se schimba odata cu pozitia normalei

unitare in lungul suprafetei de cedare, astfel incat procedeul de determinare a setului de coordonate $x_i'^*$ este direct, si nu iterativ, ca in cazul functiei neliniare de cedare.

II.6.1.2. Functie neliniara de cedare

In cazul unei functii neliniare de cedare, $g(\mathbf{X}')$, valoarea indicelui de fiabilitate, β se obtine iterativ. Se aproximeaza suprafata neliniara de cedare $g(\mathbf{X}')=0$ printr-un hiperplan tangent, $g_L(\mathbf{X}')=0$ intr-un punct de proiectare ales arbitrar in spatiul variabilelor reduce, Figura II.11 (figura este valabila doar pentru cazul bidimensional). Aproximarea se obtine numeric prin dezvoltarea functiei de cedare in serie Taylor de ordinul I in jurul punctului de proiectare ales. Astfel, problema revine la cazul functiei liniare de cedare. Urmarind pasii descrisi pentru functia liniara, se determina valoarea indicelui de fiabilitate, β cu care se recalculaaza coordonatele punctului de proiectare. Daca valorile recalculate ale coordonatelor punctului de proiectare se apropie suficient de mult de coordonatele punctului ales initial, atunci se considera ca s-au obtinut valorile reale ale indicelui de fiabilitate si ale coordonatelor punctului de proiectare. In schimb, daca valorile recalculate ale coordonatelor punctului de proiectare difera de coordonatele punctului ales initial, se reia calculul, considerand noile valori ale coordonatelor punctului de proiectare ca punct in jurul caruia se face dezvoltarea in serie Taylor de ordinul I a suprafetei neliniare de cedare. Calculul se repeta pana la obtinerea convergentei.

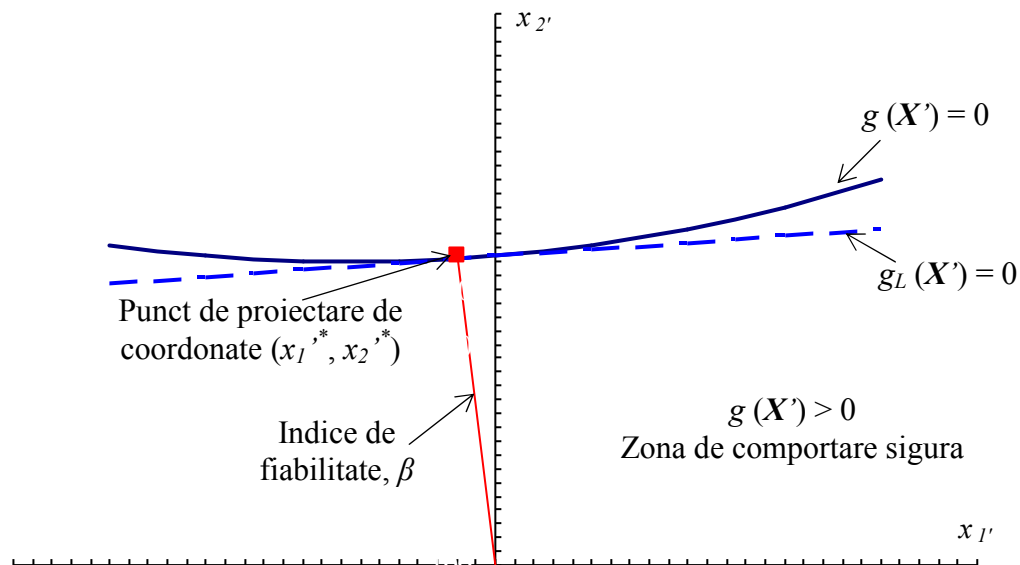


Figura II.11. Aproximarea suprafetei neliniare de cedare printr-un hiperplan tangent intr-un punct de proiectare ales arbitrar de coordonate $x_i'^*$

Pentru cazul general in care se considera o functie neliniara de cedare cu n variabile aleatoare, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, se pastreaza definitia indicelui de fiabilitate geometric ca distanta minima de la origine la suprafata de cedare in spatiul variabilelor aleatoare reduce [1], [2]:

$$\beta = \min \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'^2} \quad (II.57)$$

cu conditia ca

$$g(\mathbf{X}') = 0 \quad (II.58).$$

Relatia (II.58) este echivalenta cu $g(\mathbf{X})=0$.

Solutia ecuatiilor (II.57) si (II.58) se obtine prin metode de optimizare neliniara. Se folosesc notatiile:

$\mathbf{X}^*$ - vectorul coordonatelor punctului de proiectare in coordonate initiale;

$\mathbf{X}'^*$ - vectorul coordonatelor punctului de proiectare in coordonate reduce.

Solutia se obtine iterativ prin rezolvarea urmatorului sistem de “n+1” ecuatii [1], [2]:

$$\begin{cases} \alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^*{}^2}}, \text{ pentru } i = \overline{1, n} \\ g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \end{cases} \quad (II.59).$$

Ecuatia “n+1” a sistemului (II.59) poate fi scrisa atat in spatiul variabilelor aleatoare reduce, cat si in spatiul variabilelor aleatoare originale. Primele “n” ecuatii ale sistemului (II.59) determina cosinusii directori, cu care obtinem proiectiile indicelui de fiabilitate pe axele spatiului variabilelor aleatoare reduce:

$$x_i^* = -\alpha_i^* \cdot \beta, \text{ pentru } i = \overline{1, n} \quad (II.60).$$

Coordonatele obtinute din relatia (II.60) se folosesc pentru a determina coordonatele punctului de proiectare in spatiul variabilelor aleatoare originale:

$$x_i^* = \mu_{X_i} + x_i'^* \cdot \sigma_{X_i} = \mu_{X_i} - \alpha_i^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_i}, \text{ pentru } i = \overline{1, n} \quad (II.61).$$

Coordonatele obtinute din relatia (II.60) se introduc in cea de a “n+1” ecuatie a sistemului (II.59), de unde se determina valoarea indicelui de fiabilitate, β .

Observatii:

- in sistemul de ecuatii (II.59), semnul * indica faptul ca evaluarea cantitatilor se face pentru punctul de proiectare;

- primele “n” ecuatii ale sistemul (II.59) provin din aproximatia de ordin I (liniara) a suprafetei de cedare;
- α_i^* sunt cosinusii directori ai hiperplanului tangent in punctul de proiectare in sistemul de coordonate reduse;
- alternativ, coordonatele obtinute cu relatia (II.61) se introduc in relatia $g(\mathbf{X}^*)=0$, de unde se determina valoarea β ; astfel, functia de cedare descrisa de ceea de a “n+1”-a ecuatie a sistemului (II.59), rescrisa in spatiul variabilelor aleatoare originale, devine:

$$g[(\mu_{X_1} - \alpha_1^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_1}), (\mu_{X_2} - \alpha_2^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_2}), \dots, (\mu_{X_n} - \alpha_n^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_n})] = 0 \quad (\text{II.62}).$$

Algoritmul numeric de rezolvare a sistemului de ecuatii (II.59) este urmatorul [1], [2]:

1. Se alege un set de valori initiale pentru coordonatele punctului de proiectare in spatiul variabilelor aleatoare initiale (de baza), x_i^* . De obicei se incepe cu valorile medii ale variabilelor aleatoare de baza, dar se poate incepe cu orice alt set de coordonate ales pe baza experientei. Se determina variabilele aleatoare in coordonate reduse si valorile acestora:

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, \quad x_i^* = \frac{x_i^* - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{II.63});$$

2. Se evalueaza cosinusii directori in punctul de proiectare:

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_*^2}}, \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{II.64});$$

alternativ, derivatele partiale pot fi scrise ca:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_* = \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial X'_i} \right)_* = \sigma_{X_i} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* \quad (\text{II.65});$$

3. Pentru determinarea valorii indicelui de fiabilitate β se rezolva urmatoarea ecuatie in spatiul variabilelor aleatoare initiale:

$$g[(\mu_{X_1} - \alpha_1^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_1}), (\mu_{X_2} - \alpha_2^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_2}), \dots, (\mu_{X_n} - \alpha_n^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_n})] = 0 \quad (\text{II.66});$$

4. Folosind valoarea indicelui de fiabilitate, β determinata in pasul 3, se gasesc coordonatele unui nou punct de proiectare:

$$x_i^* = \mu_{X_i} - \alpha_i^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{II.67});$$

5. Se repeta pasii 1-4 pana se obtine convergenta (coordonatele punctului de proiectare din pasul 1 sunt suficient de apropiate de coordonatele din pasul 4 - diferenta de 5% - 10%).

In Figurile II.12 (a,b,c) se prezinta un exemplu de reprezentare grafica a evolutiei rezultatelor iteratiilor pentru o functie neliniara de cedare in spatiul variabilelor aleatoare initiale (de baza), X si Y . Aceeasi evolutie, dar in spatiul variabilelor aleatoare reduse, X' si Y' se prezinta in Figurile II.13 (a,b,c).

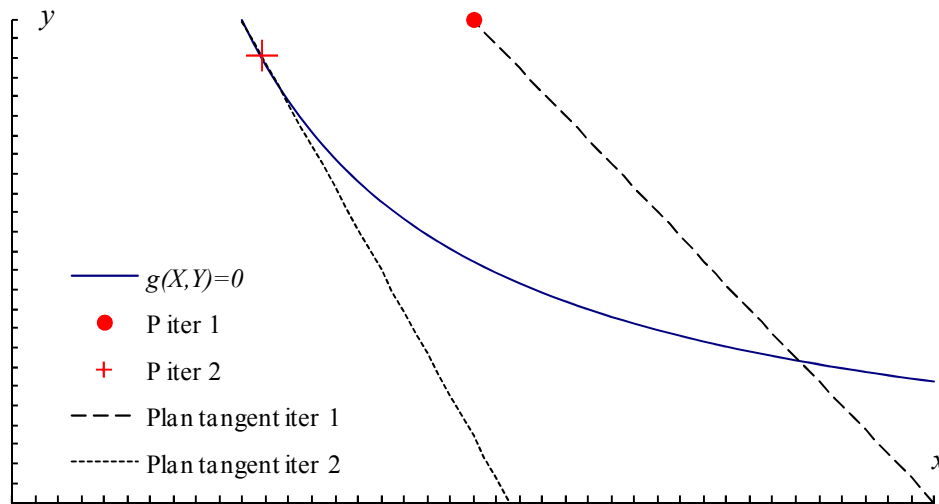


Figura II.12a. Functia neliniara de cedare, $g(X, Y)$, in spatiul variabilelor aleatoare de baza; punctul de proiectare, P , in iteratia 1 (cerc rosu) si planul tangent in iteratia 1; punctul de proiectare, P , in iteratia 2 (cruce rosie) si planul tangent in iteratia 2

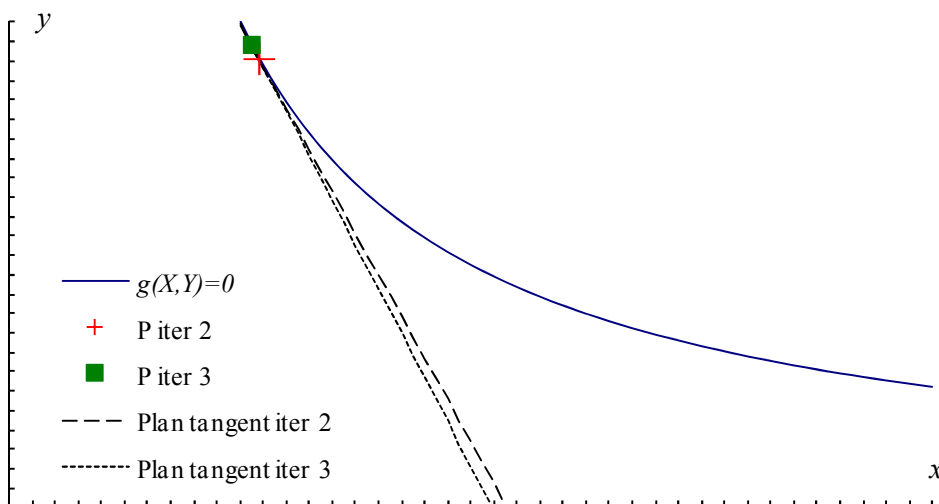


Figura II.12b. Functia neliniara de cedare, $g(X, Y)$, in spatiul variabilelor aleatoare de baza; punctul de proiectare, P , in iteratia 2 (cruce rosie) si planul tangent in iteratia 2; punctul de proiectare, P , in iteratia 3 (dreptungi verde) si planul tangent in iteratia 3

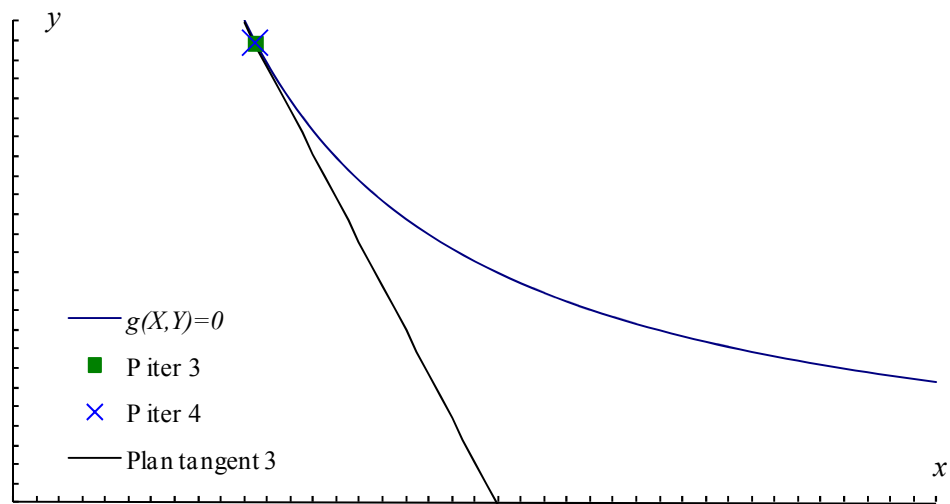


Figura II.12c. Functia neliniara de cedare, $g(X, Y)$, in spatiul variabilelor aleatoare de baza; punctul de proiectare, P , in iteratia 3 (dreptungi verde) si planul tangent in iteratia 3; punctul de proiectare, P , in iteratia 4 (X albastru); se observa ca exista converenta, intrucat punctele de proiectare in iteratiile 3 si 4 coincid

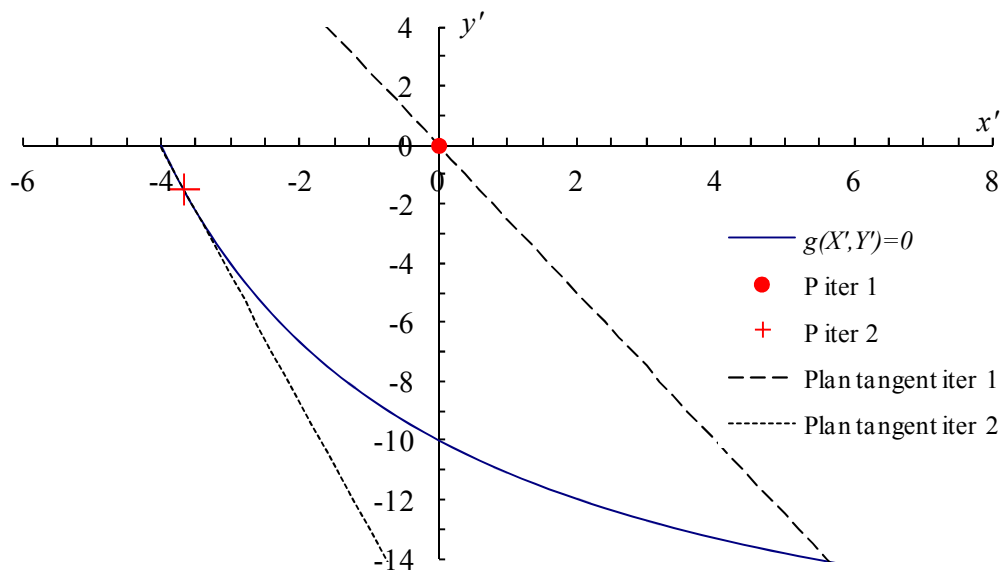


Figura II.13a. Functia neliniara de cedare, $g(X', Y')$, in spatiul variabilelor aleatoare reduce; punctul de proiectare, P , in iteratia 1 (cerc rosu) si planul tangent in iteratia 1; punctul de proiectare, P , in iteratia 2 (cruce rosie) si planul tangent in iteratia 2

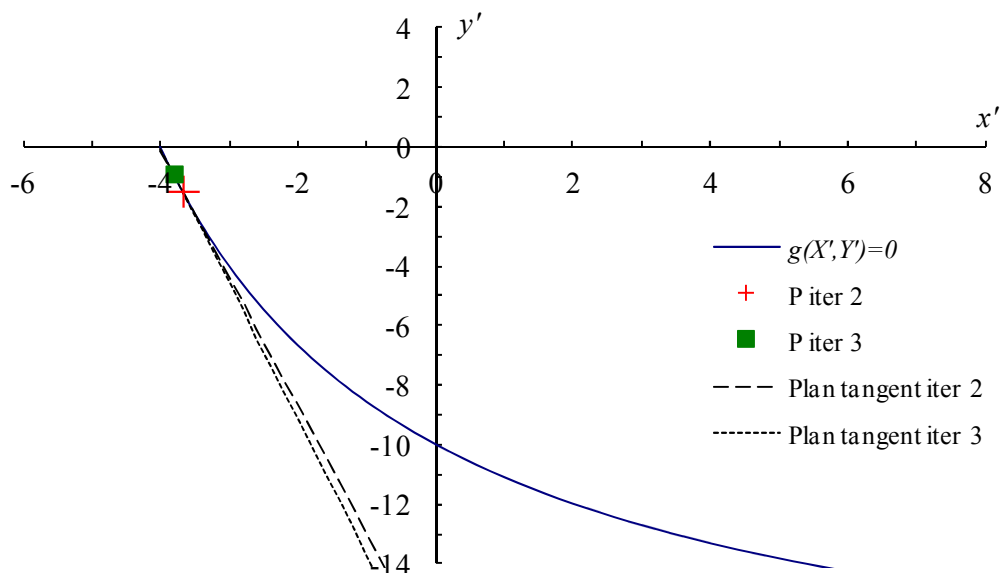


Figura II.13b. Funcția neliniară de cedare, $g(X', Y')$, în spațiul variabilelor aleatoare reduse;
punctul de proiectare, P , în iteratia 2 (cruce rosie) și planul tangent în iteratia 2;
punctul de proiectare, P , în iteratia 3 (dreptungi verde) și planul tangent în iteratia 3

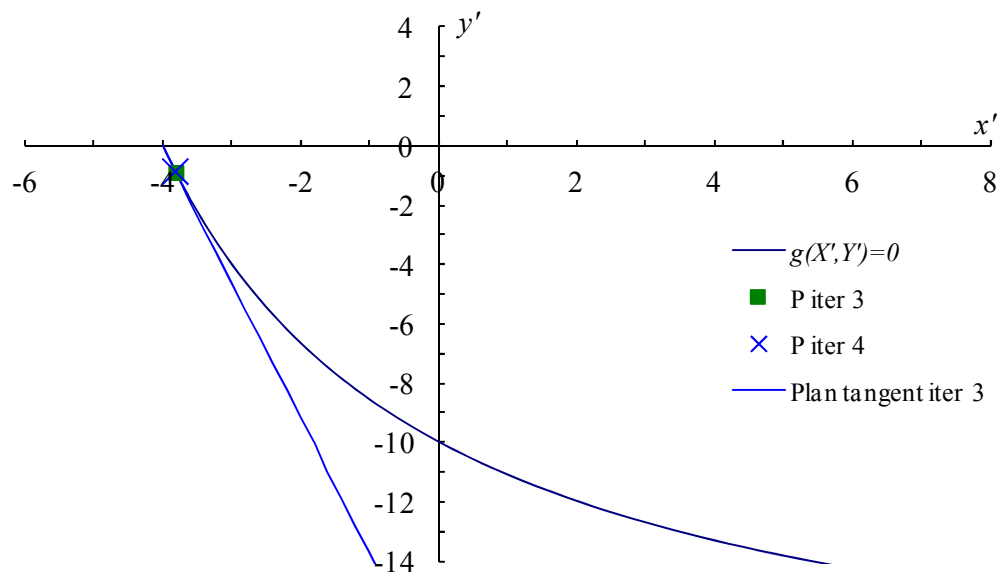


Figura II.13c. Funcția neliniară de cedare, $g(X', Y')$, în spațiul variabilelor aleatoare reduse;
punctul de proiectare, P , în iteratia 3 (dreptungi verde) și planul tangent în iteratia 3;
punctul de proiectare, P , în iteratia 4 (X albastru); se observă că există convergența, întrucât
punctele de proiectare în iteratiile 3 și 4 coincid

Daca functia de cedare este liniara, pasul 1 din algoritm nu mai este necesar si obtinerea solutiilor sistemului de ecuatii (II.59) se face direct, fara iteratii, deoarece cosinusii directori ai suprafetei liniare de cedare sunt constanti (nu depind de coordonatele punctului de proiectare ales). Daca functia de cedare este neliniara, cosinusii directori ai hiperplanului tangent in punctul de proiectare ales depind de coordonatele acestuia si obtinerea solutiilor sistemului de ecuatii (II.59) se face iterativ.

Deoarece variabilele aleatoare de baza sunt normale si necorelate, este adevarata relatia intre indicele de fiabilitate si probabilitatea de cedare, $P_f = \Phi(-\beta)$. Totusi, datorita neliniaritatii functiei de cedare (si implicit a suprafetei de cedare), relatia precedenta introduce aproximari ale probabilitatii de cedare. Interpretand probabilitatea de cedare ca valoarea integralei densitatii de repartitie multivariate a variabilelor aleatoare de baza evaluata in zona de cedare, probabilitatea de cedare este subestimata sau supraestimata, in functie de forma suprafetei de cedare (concava sau convexa), Figura II.14. Astfel, daca suprafata de cedare este concava spre origine, Figura II.14a, atunci zona reala de cedare delimitata de suprafata de cedare $g(\mathbf{X}') = 0$ este mai mare decat zona aproximativa de cedare delimitata de planul tangent in punctul de proiectare, si probabilitatea de cedare este subestimata. Daca suprafata de cedare este convexa, Figura II.14b, atunci zona reala de cedare delimitata de suprafata de cedare $g(\mathbf{X}') = 0$ este mai mica decat zona aproximativa de cedare delimitata de planul tangent in punctul de proiectare, si probabilitatea de cedare este supraestimata [1].

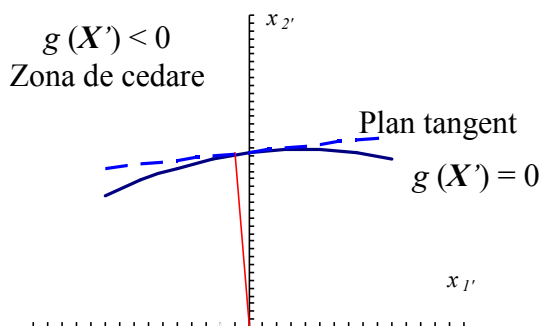


Figura II.14a. P_f subestimata; suprafata de cedare concava

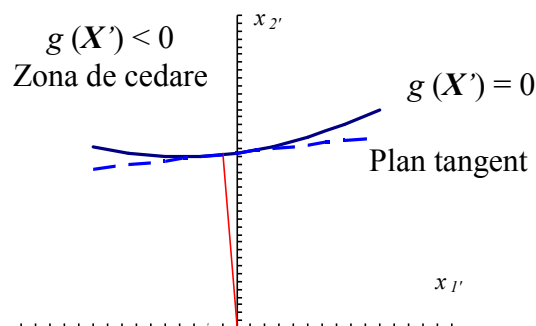


Figura II.14b. P_f supraestimata; suprafata de cedare convexa

II.6.1.3. Factori de sensibilitate

Cosinusii directori, α_i indica sensibilitatea functiei de cedare $g(\mathbf{X}')$ in punctul $\mathbf{x}_i'^*$ la variatia variabilei aleatoare de baza corespunzatoare, X_i , Figura II.14c. Daca valoarea lui α_i este mare,

atunci variatii reduse ale variabilei aleatoare de baza X_i produc variatii ample ale functiei de cedare $g(\mathbf{X}')$, Figura II.14d. Daca valoarea lui α_i este mica, atunci sensibilitatea functiei de cedare la variatia variabilei aleatoare de baza X_i este redusa si acest fapt poate fi interpretat ca un semnal ca aceasta sa fie tratata mai degraba ca o constanta. Folosind acest concept putem defini [1], [2], [6]:

- sensibilitatea omisiunii – efectul inlocuirii unei variabile aleatoare cu o constanta asupra indicelui de fiabilitate, β ;
- sensibilitatea ignorantei - efectul inlocuirii unei constante cu o variabila aleatoare asupra indicelui de fiabilitate, β .

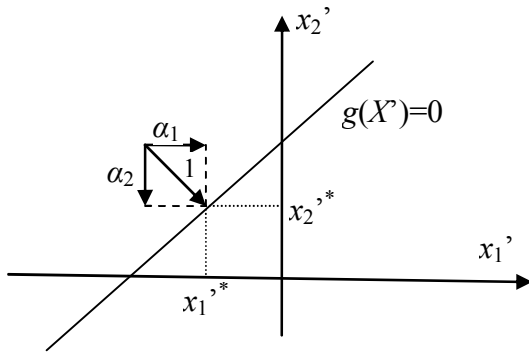


Figura II.14c. Cosinusii directori ai suprafetei de cedare $g(\mathbf{X}')=0$ in punctul de proiectare; cazul cosinusilor directori cu valori apropiate

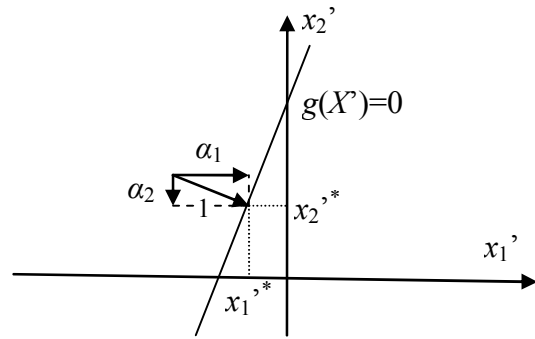


Figura II.14d. Cosinusii directori ai suprafetei de cedare $g(\mathbf{X}')=0$ in punctul de proiectare; cazul cosinusilor directori cu valori diferite

II.6.1.4. Interpretarea metodei de ordinul I pentru analiza fiabilitatii

Dezvoltand functia de cedare (de performanta), $g(\mathbf{X})$ in serie Taylor in jurul punctului $\mathbf{X}^*$ situat pe suprafata de cedare (astfel incat $g(\mathbf{X}^*)=0$), se obtine relatia [1]:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) \cong g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* + \dots \quad (\text{II.68}).$$

Dar, intrucat punctul $\mathbf{X}^*$ este situat pe suprafata de cedare ($g(\mathbf{X}^*)=0$), primul termen din relatia (II.68) dispare, si functia de cedare se rescrie ca [1]:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) \cong \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* + \dots \quad (\text{II.69}).$$

Se pot demonstra urmatoarele identitati:

$$X_i - x_i^* = \mu_{X_i} + \sigma_{X_i} \cdot X_i' - \mu_{X_i} - \sigma_{X_i} \cdot x_i^{*'} = \sigma_{X_i} \cdot (X_i' - x_i^{*'}) \quad (\text{II.70})$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* = \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \cdot \frac{\partial X_i'}{\partial X_i} \right)_* = \frac{1}{\sigma_{X_i}} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_* \quad (\text{II.71}).$$

Din relatiile (II.69)...(II.71) rezulta ca [1]:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) \cong \sum_{i=1}^n (X_i' - x_i^{*'}) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_* + \dots \quad (\text{II.72}).$$

Din relatia (II.72), se determina media functiei de cedare (tinand cont de faptul ca $\mu_{X_i'} = 0$)

$$\mu_g \cong - \sum_{i=1}^n x_i^{*'} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_* \quad (\text{II.73})$$

si dispersia functiei de cedare (tinand cont de faptul ca $\sigma_{X_i'}^2 = 1$)

$$\sigma_g^2 \cong \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_*^2 \cdot \sigma_{X_i'}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_*^2 \quad (\text{II.74}).$$

Din relatiile (II.73) si (II.74) se determina raportul intre media si abaterea standard a functiei de cedare [1]:

$$\frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{- \sum_{i=1}^n x_i^{*'} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)_*^2}} \quad (\text{II.75}).$$

Se observa ca relatia (II.75) este identica cu relatia (II.56) de determinare a indicelui de fiabilitate. Asadar, cand se foloseste punctul de medie in aproximarea de ordin I a functiei neliniare de cedare, apar erori semnificative deoarece raportul $\frac{\mu_g}{\sigma_g}$ nu este in mod necesar

distanta minima de la suprafata de cedare la originea spatiului variabilelor reduce. Mai mult, folosirea punctului de medie in aproximarea de ordin I conduce la lipsa de invarianta a indicelui de fiabilitate pentru functii de cedare cu formulari echivalente. Asa cum s-a aratat anterior, pentru functii de cedare echivalente, $R - S = 0$ si $R/S=1$, s-au obtinut indici de fiabilitate cu valori diferite. Lipsa de invarianta si estimarea corecta a indicelui de fiabilitate sunt rezolvate daca aproximarea de ordin I este evaluata intr-un punct de pe suprafata de cedare.

In cazul unei functii liniare de cedare, valoarea indicelui de fiabilitate se poate determina atat analitic, cat si folosind algoritmul de calcul prezentat anterior la punctul 6.1.2. Se considera o functie liniara de cedare:

$$g(\mathbf{X}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (\text{II.76}).$$

Egaland cu zero relatia (II.76) se obtine ecuatia suprafetei de cedare ce este reprezentata de un hiperplan.

Media functiei de cedare este

$$\mu_g = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \quad (\text{II.77})$$

si dispersia functiei de cedare este data de relatia

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n (a_i \cdot \sigma_{X_i})^2 \quad (\text{II.78}).$$

Raportul intre media si abaterea standard a functiei de cedare este:

$$\frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \cdot \sigma_{X_i})^2}} \quad (\text{II.79}).$$

Pentru a determina valoarea indicelui de fiabilitate folosind algoritmul de calcul prezentat la punctul 6.1.2, se evalueaza mai intai derivatele parțiale necesare determinării cosinusilor directori la suprafata de cedare:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* = \sigma_{X_i} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* = a_i \cdot \sigma_{X_i} \quad (\text{II.80}).$$

Cosinusii directori la suprafata de cedare in punctul de proiectare se determina prin introducerea relatiei (II.80) in relatia generala de calcul (II.64) [1]:

$$\alpha_i^* = \frac{a_i \cdot \sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \cdot \sigma_{X_i})^2}} \quad (\text{II.81}).$$

Punand conditia ca punctul de proiectare sa se afle pe suprafata de cedare rezulta ca [1]:

$$g(\mathbf{X}^*) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i^* = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot (\mu_{X_i} - \alpha_i^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_i}) = 0 \quad (\text{II.82}).$$

Prelucrând relatia (II.82) se obtine

$$a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mu_{X_i} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \alpha_i^* \cdot \beta \cdot \sigma_{X_i} \quad (\text{II.83})$$

de unde se determina valoarea indicelui de fiabilitate [1]:

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mu_{X_i}}{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \alpha_i^* \cdot \sigma_{X_i}} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mu_{X_i}}{\sum_{i=1}^n (a_i \cdot \sigma_{X_i})^2} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \cdot \sigma_{X_i})^2}} \quad (\text{II.84}).$$

Se observa identitatea relatiilor (II.79) si (II.84), astfel demonstrandu-se analitic corectitudinea relatiei directe de calcul a indicelui de fiabilitate (II.79) in cazul unei functii liniare de cedare.

II.6.2. Cazul variabilelor negausiene necorelate

In cazul in care variabilele aleatoare de baza $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt necorelate si negausiene (non-normale), acestea se transforma in variabile aleatoare necorelate normale folosind repartitii normal echivalente. Dupa efectuarea acestor transformari, calculul indicelui de fiabilitate se face ca in cazul variabilelor normale necorelate.

Pentru o variabila aleatoare de baza negausiana, X_i repartitia normala echivalenta poate fi obtinuta punand conditia de egalitate intre [1], [2]:

- (i) probabilitatile de nedepasire a valorii x_i^* a variabilei X_i evaluate cu repartitia normala echivalenta si respectiv, cu repartitia negausiana a variabilei aleatoare X_i , Figura II.15;
- (ii) probabilitatile ca valoarea x_i^* a variabilei X_i sa se gaseasca in intervalul $(x_i^*, x_i^* + dx_i)$ evaluate cu repartitia normala echivalenta si respectiv, cu repartitia negausiana a variabilei aleatoare X_i , Figura II.16;

Punctul avand coordonata x_i^* se gaseste pe suprafata de cedare (punct de proiectare) .

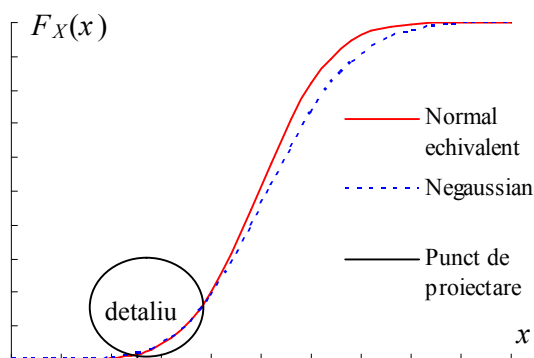


Figura II.15a. Egalarea ordonatelor functiei de repartitie normala echivalenta si a functiei de repartitie negausiene a variabilei aleatoare X_i in punctul de proiectare avand coordonata x_i^*

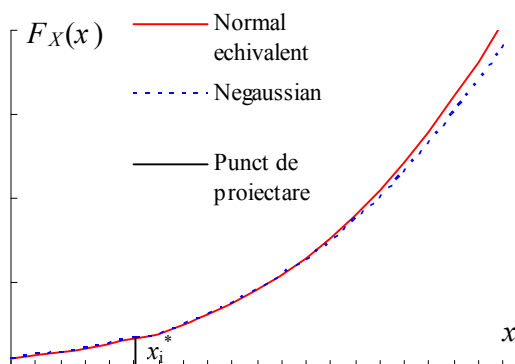


Figura II.15b. Egalarea ordonatelor functiei de repartitie normala echivalenta si a functiei de repartitie negausiene a variabilei aleatoare X_i in punctul de proiectare avand coordonata x_i^* (detaliu)

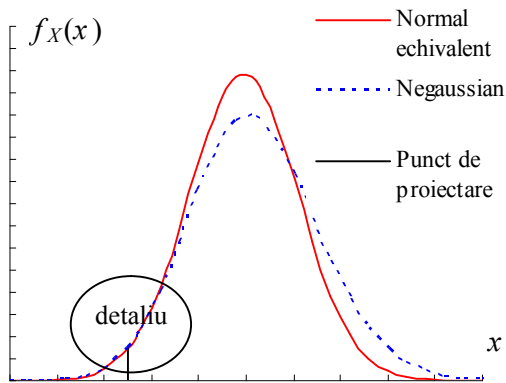


Figura II.16a. Egalarea probabilitatilor ca valoarea x_i^* sa se gaseasca in intervalul $(x_i^*, x_i^* + dx_i)$ evaluate cu repartitia normala echivalenta si respectiv, cu repartitia negaussiana a variabilei aleatoare X_i

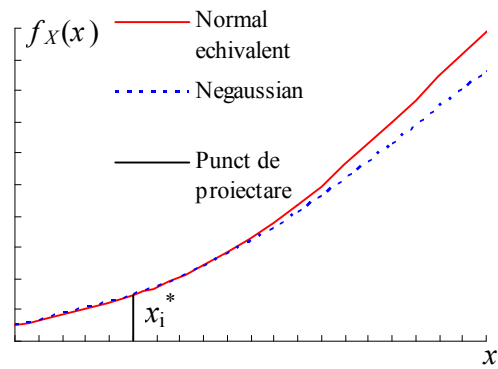


Figura II.16b. Egalarea probabilitatilor ca valoarea x_i^* sa se gaseasca in intervalul $(x_i^*, x_i^* + dx_i)$ evaluate cu repartitia normala echivalenta si respectiv, cu repartitia negaussiana a variabilei aleatoare X_i (detaliu)

Din egalitatea (i) rezulta ca [1], [2]

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = F_{X_i}(x_i^*) \quad (\text{II.85})$$

unde:

F_{X_i} este functia de repartitie originala negaussiana a variabilei aleatoare, X_i ;

Φ este functia de repartitie normala standard;

$\mu_{X_i}^N$ este media repartitiei normale echivalente a variabilei aleatoare, X_i ;

$\sigma_{X_i}^N$ este abaterea standard a repartitiei normale echivalente a variabilei aleatoare, X_i .

Din relatia (II.85) se obtine media repartitiei normale echivalente a variabilei aleatoare, X_i :

$$\mu_{X_i}^N = x_i^* - \sigma_{X_i}^N \cdot \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)] \quad (\text{II.86}).$$

Din egalitatea (ii) rezulta ca [1], [2]

$$\varphi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) dx_i' = f_{X_i}(x_i^*) dx_i \quad (\text{II.87}),$$

unde:

f_{X_i} este densitatea de repartitie originala negaussiana a variabilei aleatoare, X_i ;

φ este densitatea de repartitie normala standard;

$$x'_i = \frac{x_i - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N};$$

$$\frac{dx'_i}{dx_i} = \frac{1}{\sigma_{X_i}^N}.$$

Prelucrand relatia (II.87) rezulta ca:

$$\frac{1}{\sigma_{X_i}^N} \cdot \varphi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = f_{X_i}(x_i^*) \quad (\text{II.88}).$$

Dar, conform relatiei (II.85) exista egalitatea:

$$\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N} = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)] \quad (\text{II.89}).$$

Combinand relatiile (II.88) si (II.89), obtinem abaterea standard a repartitiei normale echivalente a variabilei aleatoare, X_i [1], [2]:

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\varphi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\}}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (\text{II.90}).$$

Avand media repartitiei normale echivalente, data de relatia (II.86), si abaterea standard a repartitiei normale echivalente, data de relatia (II.90), se determina repartitia normala echivalenta a variabilei aleatoare X_i , transformandu-se astfel variabila aleatoare negaussiana intr-una gaussiana (normala). Se repeta acest calcul pentru fiecare variabila aleatoare de baza si, apoi, se calculeaza indicele de fiabilitate ca in cazul variabilelor normale necorelate.

II.6.3. Cazul variabilelor normale corelate

In cazul in care variabilele aleatoare de baza $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt normale si corelate, acestea se transforma in variabile aleatoare normale necorelate. Dupa efectuarea acestei transformari, calculul indicelui de fiabilitate se face ca in cazul variabilelor normale necorelate.

In cazul in care functia de cedare (de performanta, de stare limita) este liniara (data de relatia (II.76)), indicele de fiabilitate se determina direct cu relatia

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j}}} \quad (\text{II.91}),$$

unde ρ_{ij} este coeficientul de corelatie al variabilelor aleatoare X_i si X_j .

Pentru setul de variabile aleatoare de baza $X_1, X_2, \dots, X_n$ se defineste matricea de covarianta, notata cu **C** [1], [2]

$$\mathbf{C} = \text{Cov} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.92}),$$

unde $\text{Cov}(X_i, X_j)$ este covarianta variabilelor aleatoare X_i si X_j .

Pentru variabilele aleatoare reduse, $X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$, matricea de covarianta se transforma in matricea coeficientilor de corelatie, **C'** [1], [2]:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.93}).$$

Vectorul variabilelor aleatoare de baza, **X**, sau a variabilelor aleatoare reduse, **X'**, se transforma intr-un vector **Y** de variabile aleatoare necorelate cu relatia [1], [2]

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{X}' \quad (\text{II.94}),$$

unde **T** este o matrice de transformare calculata din matricea coeficientilor de corelatie, **C'**, ca vectori proprii ortogonali ce corespund valorilor proprii ale lui **C'**, si **T^T** este transpusa matricei de transformare, **T**.

Valorile proprii ale lui **C'** se obtin prin determinarea radacinilor ecuatiei caracteristice [1], [2]

$$|\mathbf{C}' - \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}| = 0 \quad (\text{II.95}),$$

unde **E** este vectorul valorilor proprii ale lui **C'** si **I** este matricea diagonala unitara de dimensiune $n \times n$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.96}).$$

Vectorii proprii, $\mathbf{V}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ai matricii coeficientilor de corelatie, $\mathbf{C}'$ se obtin din urmatoarea ecuatie matriciala [1], [2]

$$(\mathbf{C}' - E_i \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{V}_i = 0 \quad (\text{II.97}),$$

unde E_i este valoarea proprie “ i ”.

Vectorii proprii ortogonali (normalizati) se obtin prin impartirea fiecarui element al vectorului $\mathbf{V}_i$ la radacina patrata a sumei patratelor (SRSS) tuturor elementelor acestuia. Matricea de transformare, $\mathbf{T}$, se obtine prin asamblarea celor n vectori proprii normalizati, in aceeasi ordine ca si valorile proprii.

In final, vectorul variabilelor aleatoare normale necorelate se obtine cu relatia [1], [2]

$$\{\mathbf{X}\} = [\boldsymbol{\sigma}_x^N] \cdot \{\mathbf{X}'\} + \{\boldsymbol{\mu}_x^N\} = [\boldsymbol{\sigma}_x^N] \cdot [\mathbf{T}] \cdot \{\mathbf{Y}\} + \{\boldsymbol{\mu}_x^N\} \quad (\text{II.98}),$$

unde

$[\boldsymbol{\sigma}_x^N]$ este matricea diagonala a abaterilor standard ale variabilelor aleatoare de baza, si
 $\{\boldsymbol{\mu}_x^N\}$ este vectorul valorilor medii ale variabilelor aleatoare de baza.

II.6.4. Metoda directa de simulare Monte-Carlo

Metoda directa de simulare Monte-Carlo implica parcurgerea urmatoarelor pasi:

- se genereaza valori aleatoare pentru variabilele de baza X_i in conformitate cu caracteristicile de probabilitate ale acestora;
- se introduc valorile generate in functia de performanta (de stare, de cedare), $g(\cdot)$;
- se calculeaza valorile functiei de performanta, $g(\cdot)$; cedarea se produce atunci cand functia de performanta are valori mai mici ca zero, $g(\cdot) < 0$.

Probabilitatea de cedare se calculeaza ca raport intre numarul de cicluri de simulare pentru care s-a produs cedarea ($g(\cdot) < 0$), N_f , si numarul total de cicluri de simulare, N [1], [2]:

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (\text{II.99}).$$

Media probabilitatii de cedare este [1], [2], [6]

$$\mu = P_f \quad (\text{II.100}),$$

dispersia probabilitatii de cedare este [1], [2], [6]

$$\sigma^2 = \frac{(1 - P_f) \cdot P_f}{N} = \frac{Re \cdot P_f}{N} \quad (\text{II.101}),$$

si coeficientul de variatie al probabilitatii de cedare este

$$V = \sqrt{\frac{(1 - P_f) \cdot P_f}{N \cdot P_f^2}} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{N \cdot P_f}} \quad (\text{II.102}).$$

Se observa din relatiile (II.101) si (II.102) ca valorile dispersiei si ale coeficientului de variatie scad odata cu cresterea numarului de cicluri de simulare; deci, pentru o precizie sporita, este necesar un numar mare de cicluri de simulare. De asemenea, numarul de cicluri de simulare trebuie sa fie mai mare ca valoarea inversa a probabilitatii de cedare ce se determina. Calculul se incepe cu o valoare arbitrara (suficient de mare, uzual mai mare ca 10^4) a numarului de cicluri de simulare si se determina o probabilitate de cedare; apoi, se mareste numarul de cicluri (de 10 ori) si se recalculeaza probabilitatea de cedare. Daca valoarea nou determinata a probabilitatii de cedare difera substantial de valoarea initiala, se mareste din nou numarul de cicluri de simulare si se recalculeaza probabilitatea de cedare. Calculul se opreste atunci cand valorile probabilitatilor de cedare din doua seturi de simulari consecutive sunt suficient de apropiate.

II.7. Proiectarea bazata pe fiabilitate

II.7.1. Introducere

Proiectarea bazata pe fiabilitate foloseste [6]:

1. caracteristicile de probabilitate ale incarcarilor / efectelor sectionale ale incarcarilor;
2. caracteristicile de probabilitate ale rezistentelor de material / rezistentelor sectionale;
3. metodele de analiza a fiabilitatii.

Exista trei nivele ale metodelor de analiza a fiabilitatii structurale [6]:

- metode de nivel I, ce folosesc coeficienti partiali de siguranta calibrati pe modele de analiza a fiabilitatii;

- metode de nivel II, bazate pe momente ale variabilelor aleatoare si care folosesc aproximarea liniara a functiilor neliniare de performanta (de stare) (de ex., *FORM*);
- metode de nivel III, ce folosesc descrierea probabilistica completa a variabilelor aleatoare de baza.

In proiectarea bazata pe fiabilitate exista doua abordari de baza [6]:

- proiectarea directa bazata pe fiabilitate;
- proiectarea folosind coeficientii partiali de siguranta.

Abordarea (i) include metode de nivel II si/sau de nivel III. Conditia de proiectare este asigurarea, pentru sistemul proiectat, a unui indice de fiabilitate efectiv cel putin egal cu indicele de fiabilitate tinta [1], [6]:

$$\beta_{\text{efectiv}} \geq \beta_{\text{tinta}} \quad (\text{II.103})$$

Abordarea (ii) este o metoda de nivel I. Abordarea este denumita *LRFD* (Load and Resistance Factored Design) in literatura de limba engleza. Conditia de proiectare este exprimata astfel: “Valoarea de proiectare a rezistentei sectionale este mai mare, sau cel mult egala cu suma valorilor de proiectare a efectelor sectionale ale incarcarilor”. Aceasta conditie se exprima matematic astfel [1]:

$$R_d \geq \sum_{i=1}^m E_{d,i} \Leftrightarrow \gamma_R \cdot R_k \geq \sum_{i=1}^m \gamma_{E,i} \cdot E_{k,i} \quad (\text{II.104}).$$

In relatia (II.104) indicele “d” se refera la valori de proiectare, indicele “k” se refera la valori caracteristice si coeficientii γ sunt coeficienti partiali de siguranta. Relatia (II.104) implica faptul ca starea limita nu este depasita (functia de performanta este cel putin egala cu zero) atunci cand se introduc in analiza valorile de proiectare, $E_d = E\{F_{d_1}, F_{d_2}, \dots, a_{d_1}, a_{d_2}, \dots, \theta_{d_1}, \theta_{d_2}, \dots\}$ si $R_d = R\{X_{d_1}, X_{d_2}, \dots, a_{d_1}, a_{d_2}, \dots, \theta_{d_1}, \theta_{d_2}, \dots\}$, unde:

F – actiune / incarcare;

X – proprietate de material;

a – proprietate geometrica;

θ – incertitudine de modelare.

II.7.2. Proiectarea bazata pe fiabilitate conform *EN 1990 – Basis of Structural Design*

Fie E , efectul sectional al incarcarilor si R , rezistenta sectionala, ambele considerate variabile aleatoare de baza.

(i) Se considera variabila aleatoare E , efectul sectional al incarcarii, Figura II.17. Variabila aleatoare redusa, e este:

$$e = \frac{E - \mu_E}{\sigma_E} \quad (\text{II.105}).$$

Pentru $E=E_d$ (unde E_d este valoarea de proiectare a efectului sectional al incarcarii, E) valoarea de proiectare a variabilei aleatoare reduse este:

$$e_d = \frac{E_d - \mu_E}{\sigma_E} \quad (\text{II.106}).$$

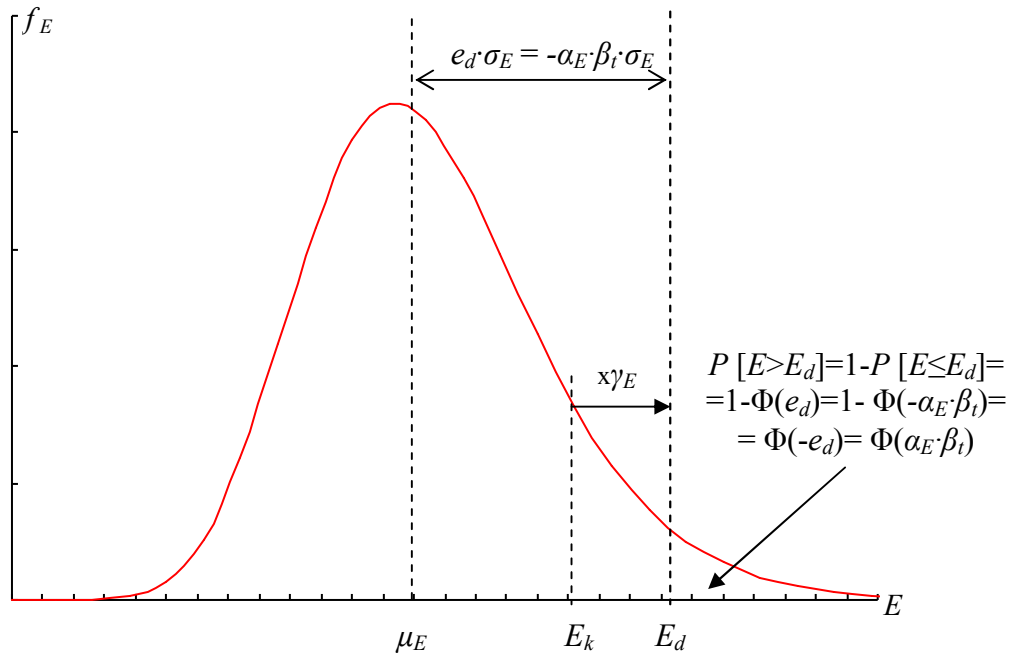


Figura II.17. Densitatea de repartitie a efectului sectional al incarcarii, E

Valoarea de proiectare a variabilei aleatoare reduse, e_d , se poate exprima ca produs intre indicele de fiabilitate tinta, β_t si cosinusul director corespunzator variabilei, α_E

$$e_d = -\alpha_E \cdot \beta_t \quad (\text{II.107}).$$

Din relatiile (II.106) si (II.107) se deduce valoarea de proiectare a efectului sectional al incarcarii:

$$E_d = \mu_E + e_d \cdot \sigma_E = \mu_E - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot \sigma_E = \mu_E (1 - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot V_E) \quad (\text{II.108}).$$

Coeficientul partial de siguranta aplicat efectului sectional al incarcarii, γ_E se determina ca raport intre valoarea de proiectare si valoarea caracteristica a efectului sectional al incarcarii:

$$\gamma_E = \frac{E_d}{E_k} = \frac{\mu_E(1 - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot V_E)}{E_k} \quad (\text{II.109}).$$

Daca variabila aleatoare E are o repartitie de tip normal, pentru care valoarea caracteristica poate fi exprimata sub forma, $E_k = \mu_E + k_E \cdot \sigma_E = \mu_E(1 + k_E \cdot V_E)$, atunci relatia (II.109) poate fi scrisa sub forma:

$$\gamma_E = \frac{E_d}{E_k} = \frac{\mu_E(1 - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot V_E)}{\mu_E(1 + k_E \cdot V_E)} = \frac{1 - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot V_E}{1 + k_E \cdot V_E} \quad (\text{II.110}).$$

(ii) Se considera variabila aleatoare R , rezistenta sectionala, Figura II.18. Variabila aleatoare redusa, r este:

$$r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (\text{II.111}).$$

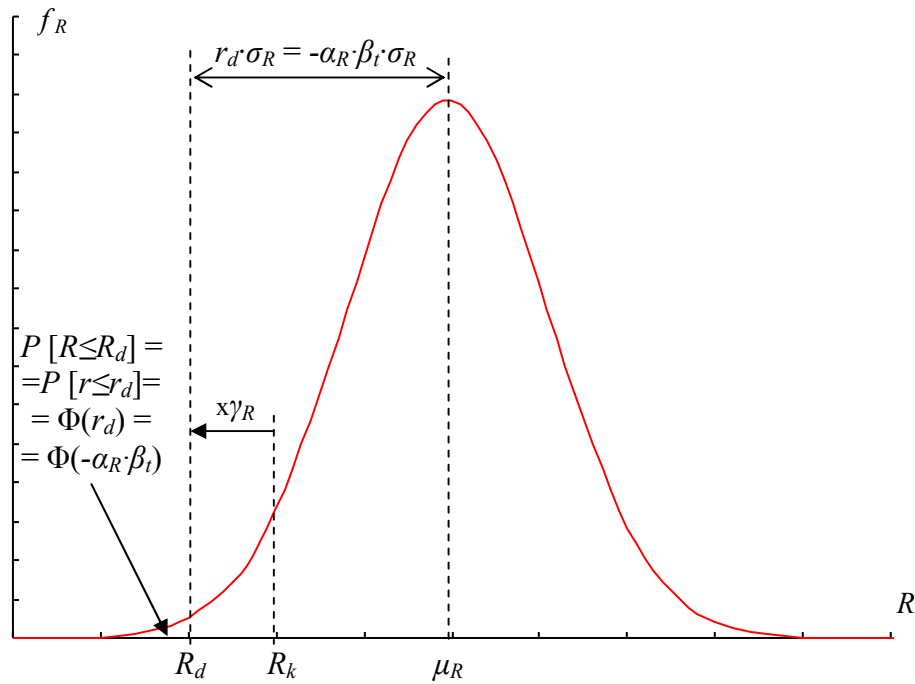


Figura II.18. Densitatea de repartitie a rezistentei sectionale, R

Pentru $R = R_d$, unde R_d este valoarea de proiectare a rezistentei sectionale, R , valoarea de proiectare a variabilei aleatoare reduse este:

$$r_d = \frac{R_d - \mu_R}{\sigma_R} \quad (\text{II.112}).$$

Valoarea de proiectare a variabilei aleatoare reduse, r_d , se poate exprima ca produs între indicele de fiabilitate tinta, β_t și cosinusul director corespunzător variabilei, α_R

$$r_d = -\alpha_R \cdot \beta_t \quad (\text{II.113}).$$

Din relațiile (II.112) și (II.113) se deduce valoarea de proiectare a rezistenței sectionale:

$$R_d = \mu_R + r_d \cdot \sigma_R = \mu_R - \alpha_R \cdot \beta_t \cdot \sigma_R = \mu_R (1 - \alpha_R \cdot \beta_t \cdot V_R) \quad (\text{II.114}).$$

Coeficientul parțial de siguranță aplicat rezistenței sectionale, γ_R se determină ca raport între valoarea de proiectare și valoarea caracteristică a rezistenței sectionale:

$$\gamma_R = \frac{R_d}{R_k} = \frac{\mu_R (1 - \alpha_R \cdot \beta_t \cdot V_R)}{R_k} \quad (\text{II.115}).$$

Dacă variabila aleatoare R are o repartiție de tip normal, pentru care valoarea caracteristică poate fi exprimată sub formă, $R_k = \mu_R + k_R \cdot \sigma_R = \mu_R (1 + k_R \cdot V_R)$, atunci relația (II.115) poate fi scrisă sub formă:

$$\gamma_R = \frac{R_d}{R_k} = \frac{\mu_R (1 - \alpha_R \cdot \beta_t \cdot V_R)}{\mu_R (1 + k_R \cdot V_R)} = \frac{1 - \alpha_R \cdot \beta_t \cdot V_R}{1 + k_R \cdot V_R} \quad (\text{II.116}).$$

Conform ISO 2394:1998 – *General principles on reliability for structures* – valorile cosinusilor directori (ai factorilor de sensibilitate) sunt:

<i>Variabila</i>	<i>Efecte sectionale ale incarcarilor</i>	<i>Rezistente sectionale</i>
Dominanta	$\alpha_E = -0,70$	$\alpha_R = 0,80$
Altele	$\alpha_E = -0,28$	$\alpha_R = 0,32$

Conform Anexei C din EN 1990 - *Basis of Structural Design* – valorile tinta ale indicelui de fiabilitate pentru structurile de clasă RC2 (construcții obișnuite) sunt:

<i>Valori tinta ale indicelui de fiabilitate pentru:</i>	<i>Intr-un an</i>	<i>In 50 de ani</i>
SLU	$\beta_t = 4,7$	$\beta_t = 3,8$
SLS	$\beta_t = 2,9$	$\beta_t = 1,5$

Dacă principala sursă de incertitudine este data de acțiuni / efecte sectionale ale incarcarilor și dacă acțiunile au maxime anuale independente statistic, valorile indicelui de fiabilitate pentru

diferite perioade de referinta (n , exprimate in ani), β_n se pot calcula in functie de valoarea indicelui de fiabilitate pentru un an, β_1 , folosind urmatoarea relatie bazata pe independenta statistica a valorilor maxime anuale,

$$Re_n = (Re_1)^n \Rightarrow \Phi(\beta_n) = [\Phi(\beta_1)]^n \quad (II.117)$$

din care rezulta valoarea indicelui de fiabilitate pentru o perioada de referinta de n ani:

$$\beta_n = \Phi^{-1} \{ [\Phi(\beta_1)]^n \} \quad (II.118).$$

De exemplu, pentru un indice de fiabilitate tinta intr-un an, $\beta_1 = 4,7$, aplicand relatia (II.118) se obtin valorile indicelui de fiabilitate pentru perioade de referinta de 10, 20 si 50 de ani egale cu $\beta_{10} = 4,21$, $\beta_{20} = 4,05$ si $\beta_{50} = 3,83$.

Folosind valorile factorului de sensibilitate si ale indicelui de fiabilitate tinta in 50 de ani pentru *SLU*, rezulta, de exemplu, ca valoarea de calcul a efectului sectional al incarcarilor (in cazul in care incarcarea considerata este variabila dominanta) este egala cu $E_d = \mu_E (1 - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot V_E) = \mu_E (1 + 0,7 \cdot 3,8 \cdot V_E) = \mu_E (1 + 2,66 \cdot V_E)$.

Functia de performanta (de stare) din EN 1990 foloseste variabilele aleatoare de baza, R si E , considerate necorelate, Figura II.19:

$$g = R - E \quad (II.119).$$

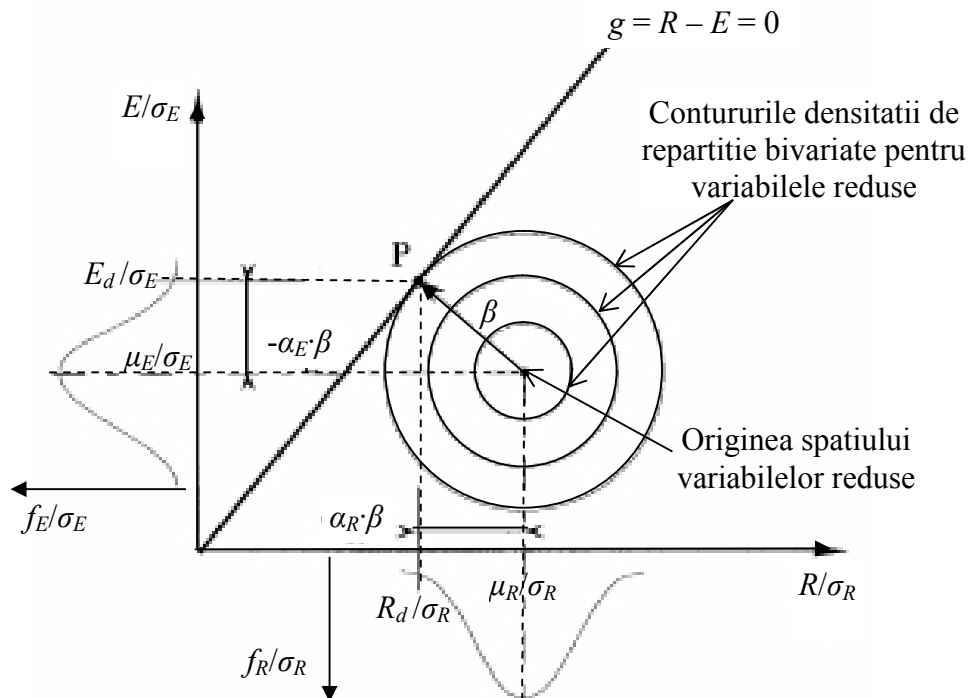


Figura II.19. Punctul de proiectare, P si indicele de fiabilitate, β in teoria *FORM* pentru variabile aleatoare normale necorelate – adaptat dupa EN 1990

Folosind variabilele aleatoare reduse date de relatiile (II.105) si (II.111), functia de performanta in coordonate reduse, Figura II.19, devine:

$$g = r \cdot \sigma_R - e \cdot \sigma_E + \mu_R - \mu_E \quad (\text{II.120}).$$

Reprezentarea din Figura II.19 este in coordonate normalizate cu abaterea standard, in acest fel toate distantele fiind masurate in produse $\alpha \cdot \beta$ (de exemplu: $\frac{E_d}{\sigma_E} = \frac{\mu_E}{\sigma_E} - \alpha_E \cdot \beta$).

Pentru a determina cosinusii directori (factorii de sensibilitate), se evalueaza derivatele partiale:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \sigma_R \quad (\text{II.121})$$

$$\frac{\partial g}{\partial e} = -\sigma_E \quad (\text{II.122}).$$

Factorii de sensibilitate rezulta:

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \quad (\text{II.123})$$

$$\alpha_E = -\frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \quad (\text{II.124}).$$

Coordonatele punctului de proiectare in spatiul variabilelor reduse sunt:

$$r_d = -\alpha_R \cdot \beta_t = -\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \cdot \beta \quad (\text{II.125})$$

$$e_d = -\alpha_E \cdot \beta_t = \frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \cdot \beta \quad (\text{II.126}).$$

Inlocuind coordonatele punctului de proiectare in functia de performanta in coordonate reduse (relatia II.120) si punand conditia ca aceasta sa fie egala cu zero se obtine relatia:

$$r_d \cdot \sigma_R - e_d \cdot \sigma_E + \mu_R - \mu_E = -\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \cdot \beta \cdot \sigma_R - \frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \cdot \beta \cdot \sigma_E + \mu_R - \mu_E = 0 \quad (\text{II.127}).$$

Prelucrând relatia (II.126) se determina indicele de fiabilitate:

$$-\beta \cdot \frac{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} + \mu_R - \mu_E = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (\text{II.128}).$$

Daca functia de performanta, g are o repetitie de probabilitate de tip normal, probabilitatea de cedare este:

$$P_f = P[g \leq 0] = \Phi\left(\frac{0 - \mu_g}{\sigma_g}\right) = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (\text{II.129}).$$

Coordonatele punctului de proiectare in coordonatele initiale (ale variabilelor aleatoare de baza, R si E) sunt date de relatiile (II.108) si (II.114). Probabilitatile de depasire (de nedepasire) asociate valorilor de proiectare ale variabilelor aleatoare de baza pentru un indice de fiabilitate tinta sunt:

$$P[E > E_d] = 1 - P[E \leq E_d] = 1 - \Phi(e_d) = 1 - \Phi(-\alpha_E \cdot \beta_t) = \Phi(\alpha_E \cdot \beta_t) \quad (\text{II.130})$$

si

$$P[R \leq R_d] = \Phi(r_d) = \Phi(-\alpha_R \cdot \beta_t) = 1 - \Phi(\alpha_R \cdot \beta_t) \quad (\text{II.131}).$$

Factorii de sensibilitate folositi in *EN 1990* sunt conform *ISO 2394:1998*:

$$\begin{cases} \alpha_E = -0,7 \\ \alpha_R = 0,8 \end{cases} \quad \text{pentru } 0,16 \leq \frac{\sigma_E}{\sigma_R} \leq 7,6 \quad (\text{II.132}).$$

Inlocuind valorile factorilor de sensibilitate in relatiile (II.130) si (II.131), se obtin urmatoarele probabilitati:

$$P[E > E_d] = \Phi(\alpha_E \cdot \beta_t) = \Phi(-0,7 \cdot \beta_t) \quad (\text{II.133})$$

si

$$P[R \leq R_d] = \Phi(-\alpha_R \cdot \beta_t) = \Phi(0,8 \cdot \beta_t) \quad (\text{II.134}).$$

De exemplu, pentru efectul sectional al incarcarii, E , considerand valoarea factorului de sensibilitate $\alpha_E = -0,7$ si indicii de fiabilitate tinta din *EN 1990*, aplicand relatia (II.133) se obtin valorile din Tabelul II.2.

Tabel II.2. Valori ale indicelui de fiabilitate tinta si ale probabilitatii de depasire a efectului sectional al incarcarii pentru diferite perioade de referinta si pentru diferite stari limita – cazul incarcarii variabile predominante

<i>Stare limita</i>	<i>SLU</i>		<i>SLS</i>	
<i>Nr. ani</i>	1 an	50 ani	1 an	50 ani
β_t	4,7	3,8	2,9	1,5
$P[E > E_d]$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$

Daca nu este satisfacuta conditia privind raportul abaterilor standard ($0,16 \leq \frac{\sigma_E}{\sigma_R} \leq 7,6$), se foloseste $\alpha = \pm 1,0$ pentru variabila cu abaterea standard mai mare si $\alpha = \pm 0,4$ pentru variabila cu abaterea standard mai mica. Cand modelul pentru actiuni contine mai multe variabile aleatoare, relatia (II.133) se foloseste pentru variabila aleatoare predominanta. Pentru celelalte actiuni se foloseste o valoare de proiectare pentru care $P[E > E_d] = \Phi(-0,7 \cdot 0,4 \cdot \beta_t) = \Phi(-0,28 \cdot \beta_t)$ (valoare ce corespunde, pentru $\beta_t = 3,8$, fractilului superior $E_{0,90}$). De exemplu, pentru efectul sectional al incarcarii, E , considerand valoarea factorului de sensibilitate $\alpha_E = -0,28$ si indicii de fiabilitate tinta din EN 1990, aplicand relatia (II.133) se obtine valorile din Tabelul II.3.

Tabel II.3. Valori ale indicelui de fiabilitate tinta si ale probabilitatii de depasire a efectului sectional al incarcarii pentru diferite perioade de referinta si pentru diferite stari limita – cazul incarcarii variabile nepredominante

<i>Stare limita</i>	<i>SLU</i>		<i>SLS</i>	
<i>Nr. ani</i>	1 an	50 ani	1 an	50 ani
β_t	4,7	3,8	2,9	1,5
$P[E > E_d]$	$9,4 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$

II.7.3. Calibrarea coeficientilor partiali de siguranta conform EN 1990 – *Basis of Structural Design*

Calibrarea coeficientilor partiali de siguranta se face diferentiat, in functie de tipul de repartitie de probabilitate a variabilei aleatoare de baza. In continuare se prezinta calibrarea acestora pentru efectul sectional al incarcarii, E . Calibrarea coeficientilor partiali de siguranta aplicati rezistentelor sectionale, R , se face asemanator.

a) Repartitie normala a lui E

Se considera variabila aleatoare de baza $E \sim N(\mu_E, \sigma_E)$. Valoarea caracteristica a efectului sectional al incarcarii este:

$$E_k = \mu_E + k \cdot \sigma_E = \mu_E (1 + k \cdot V_E) \quad (\text{II.135}),$$

unde:

μ_E este media variabilei aleatoare E ;

$k = \Phi^{-1}(p)$, p fiind probabilitatea de nedepasire a valorii caracteristice, E_k ;

σ_E este abaterea standard a variabilei aleatoare E ;

V_E este coeficientul de variatie al variabilei aleatoare E .

Valoarea de proiectare a efectului sectional al incarcarii este:

$$E_d = \mu_E - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot \sigma_E = \mu_E (1 - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot V_E) \quad (\text{II.136}).$$

Din relatiile (II.135) si (II.136) obtinem coeficientul partial de siguranta aplicat efectului sectional al incarcarii:

$$\gamma_E = \frac{E_d}{E_k} = \frac{\mu_E (1 - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot V_E)}{\mu_E (1 + k \cdot V_E)} = \frac{1 - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot V_E}{1 + k \cdot V_E} \quad (\text{II.137}).$$

b) Repartitie lognormala a lui E

Se considera variabila aleatoare de baza $E \sim \text{LN}(\mu_{\ln E}, \sigma_{\ln E})$. Valoarea caracteristica a efectului sectional al incarcarii este:

$$E_k = \exp(\mu_{\ln E} + k \cdot \sigma_{\ln E}) = \exp(\ln e_m) \cdot \exp(k \cdot \sigma_{\ln E}) \quad (\text{II.138}),$$

unde:

$\mu_{\ln E}$ este media logaritmului variabilei aleatoare E ;

$k = \Phi^{-1}(p)$, p fiind probabilitatea de nedepasire a valorii caracteristice, E_k ;

$\sigma_{\ln E}$ este abaterea standard a logaritmului variabilei aleatoare E ;

e_m este mediana variabilei aleatoare E .

Valoarea de proiectare a efectului sectional al incarcarii este:

$$E_d = \exp(\mu_{\ln E} - \alpha_E \cdot \beta_t \cdot \sigma_{\ln E}) = \exp(\ln e_m) \cdot \exp(-\alpha_E \cdot \beta_t \cdot \sigma_{\ln E}) \quad (\text{II.139}).$$

Din relatiile (II.138) si (II.139) obtinem coeficientul partial de siguranta aplicat efectului sectional al incarcarii:

$$\gamma_E = \frac{E_d}{E_k} = \frac{\exp(-\alpha_E \cdot \beta_t \cdot \sigma_{\ln E})}{\exp(k \cdot \sigma_{\ln E})} = \exp[-\sigma_{\ln E} (\alpha_E \cdot \beta_t + k)] \quad (\text{II.140}).$$

Pentru $V_E \leq 0,20$, $\sigma_{\ln E} \cong V_E$ si relatia (II.140) devine:

$$\gamma_E = \exp[-V_E (\alpha_E \cdot \beta_t + k)] \quad (\text{II.141}).$$

c) Repartitie Gumbel pentru maxime a lui E

Se considera variabila aleatoare de baza $E \sim \text{Gmax}(u, \alpha)$. Valoarea caracteristica a efectului sectional al incarcarii este:

$$E_k = u - \frac{1}{\alpha} \cdot \ln[-\ln(p)] \quad (\text{II.142}),$$

unde:

p este probabilitatea de nedepasire a valorii caracteristice, E_k ;

u si α sunt parametrii repartitiei Gumbel pentru maxime.

Valoarea de proiectare a efectului sectional al incarcarii este:

$$E_d = u - \frac{1}{\alpha} \cdot \ln\{-\ln[\Phi(-\alpha_E \cdot \beta_t)]\} \quad (\text{II.143}).$$

Din relatiile (II.142) si (II.143) obtinem coeficientul partial de siguranta aplicat efectului sectional al incarcarii:

$$\gamma_E = \frac{E_d}{E_k} = \frac{u - \frac{1}{\alpha} \cdot \ln\{-\ln[\Phi(-\alpha_E \cdot \beta_t)]\}}{u - \frac{1}{\alpha} \cdot \ln[-\ln(p)]} \quad (\text{II.144}).$$

Parametrii repartitiei Gumbel pentru maxime sunt determinati in functie de media si abaterea standard a variabilei aleatoare de baza, E :

$$u = m_E - \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\text{II.145})$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sigma_E} \quad (\text{II.146})$$

unde γ este constanta lui Euler-Mascheroni ($\gamma = 0,5772\dots$).

Folosind relatiile (II.145) si (II.146) se determina produsul parametrilor repartitiei Gumbel pentru maxime:

$$u \cdot \alpha = \left(m_E - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \cdot \alpha = m_E \cdot \alpha - \gamma = m_E \cdot \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sigma_E} - \gamma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{V_E} - \gamma \quad (\text{II.147}).$$

Inmultind atat numaratorul cat si numitorul relatiei (II.144) cu parametrul α , se obtine:

$$\gamma_E = \frac{u \cdot \alpha - \ln\{-\ln[\Phi(-\alpha_E \cdot \beta_t)]\}}{u \cdot \alpha - \ln[-\ln(p)]} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{V_E} - \gamma - \ln\{-\ln[\Phi(-\alpha_E \cdot \beta_t)]\}}{\frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{V_E} - \gamma - \ln[-\ln(p)]} \quad (\text{II.148}).$$

În Figurile II.20...II.24 se prezintă variația coeficienților parțiali de siguranță, γ_E și γ_R , determinați pe baza relațiilor (II.137), (II.140) și (II.148) pentru valori fractil superioare $E_{0,95}$ și $E_{0,98}$, respectiv pentru valori fractil inferioare $R_{0,05}$ și $R_{0,02}$. Valorile de calibrare sunt cele recomandate de EN1990, respectiv $\alpha_E = -0,7$, $\alpha_R = 0,8$ și $\beta_t = 4,7$.

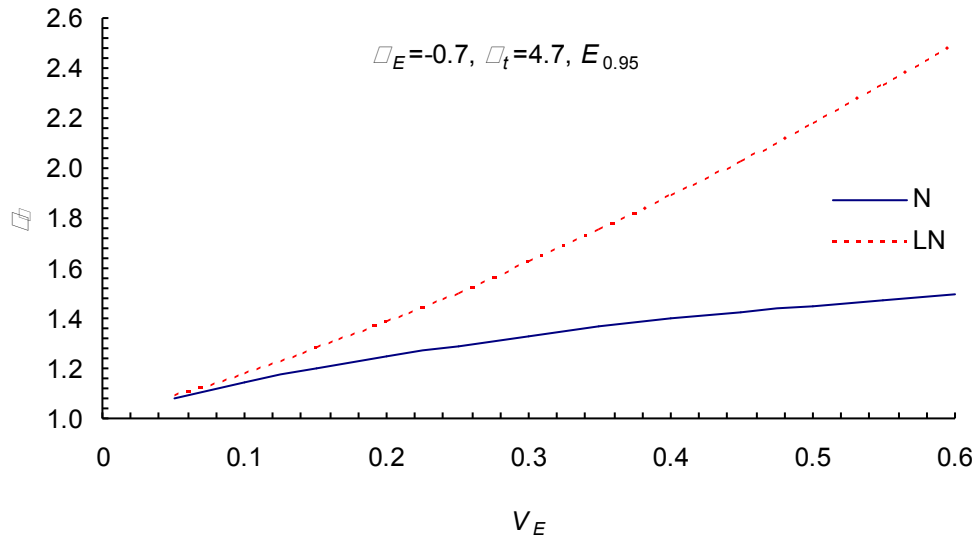


Figura II.20. Variația coeficientului parțial de siguranță γ_E pentru repartiția normală (N) și lognormală (LN) a variabilei aleatoare de bază, E , aplicat fractilului $E_{0,95}$

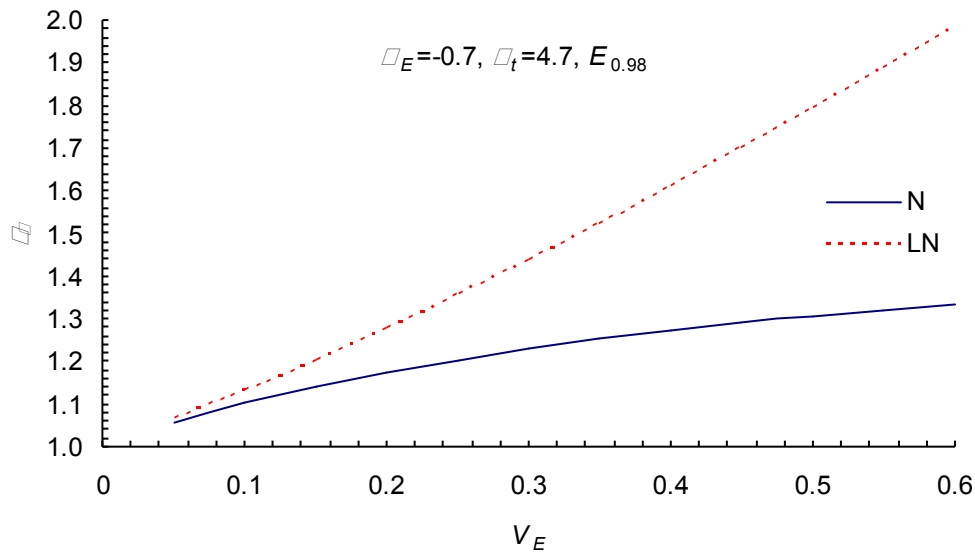


Figura II.21. Variația coeficientului parțial de siguranță γ_E pentru repartiția normală (N) și lognormală (LN) a variabilei aleatoare de bază, E , aplicat fractilului $E_{0,98}$

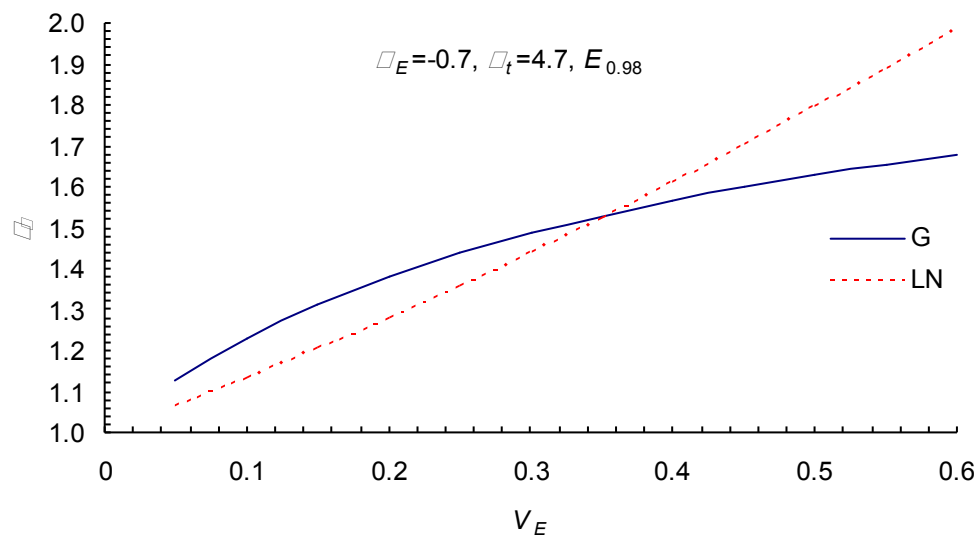


Figura II.22. Variatia coeficientului partial de siguranta γ_E pentru repartitia Gumbel pentru maxime (G) si lognormala (LN) a variabilei aleatoare de baza, E , aplicat fractilului $E_{0.98}$

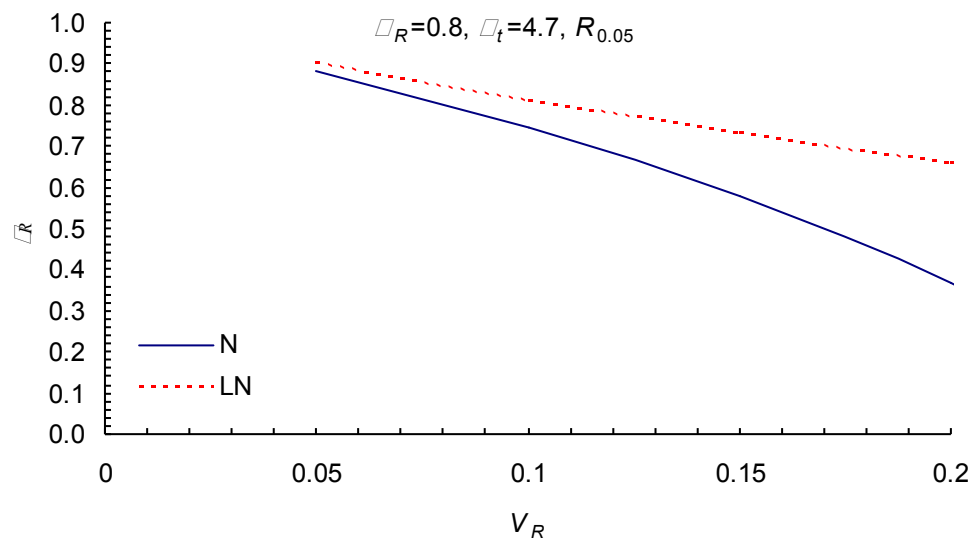


Figura II.23. Variatia coeficientului partial de siguranta γ_R pentru repartitia normala (N) si lognormala (LN) a variabilei aleatoare de baza, R , aplicat fractilului $R_{0.05}$

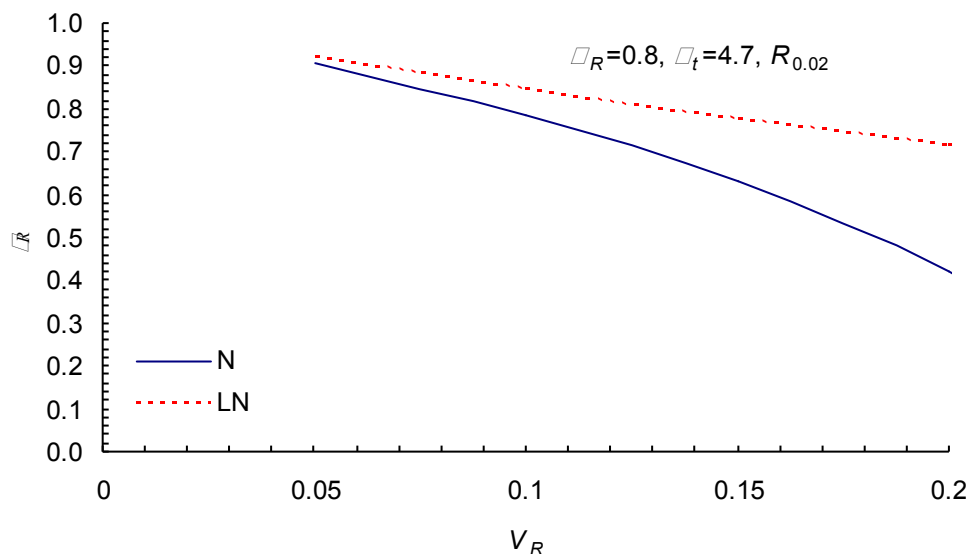


Figura II.24. Variatia coeficientului partial de siguranta γ_R pentru repartitia normala (N) si lognormala (LN) a variabilei aleatoare de baza, R , aplicat fractilului $R_{0.02}$

II.7.4. Gruparea efectelor sectionale ale incarcarilor conform CR0-2005 – Bazele proiectarii structurilor in constructii

Starile limita ultime, *SLU*, sunt stari asociate cu prabusirea sau cu forme similare de cedare structurala. Starile limita ce implica protectia vietii oamenilor si a sigurantei structurii sunt clasificate ca stari limita ultime.

Starile limita de serviciu, *SLS*, sunt stari dincolo de care cerintele necesare pentru utilizarea in conditii normale a constructiei/structurii nu mai sunt indeplinite. Starile limita ce iau in considerare functionarea structurii sau a elementelor structurale in conditii normale de exploatare, confortul oamenilor/ocupantilor constructiei si limitarea vibratiilor, deplasarilor si deformatiilor structurii sunt clasificate ca stari limita de serviciu.

Actiunile in constructii sunt clasificate in [7]:

- Actiuni permanente, G – sunt actiuni pentru care variatia in timp este nula sau neglijabila;
- Actiuni variabile, Q – sunt actiuni pentru care variatia in timp a parametrilor ce caracterizeaza actiunea nu este nici monotona nici neglijabila;
- Actiuni accidentale, A – sunt actiuni de durata scurta dar de intensitate semnificativa, ce se exercita cu probabilitate redusa asupra structurii in timpul duratei sale de viata proiectate; de obicei, cutremurul si impactul reprezinta actiuni accidentale, iar zapada si vantul reprezinta actiuni variabile.

In general, actiunile sunt reprezentate prin urmatoarele doua valori [3], [7]:

- valoarea caracteristica a unei actiuni, F_k , corespunde unei probabilitati mici de depasire a actiunii in sensul defavorabil pentru siguranta structurii in timpul unui interval de timp de referinta. Valoarea caracteristica se determina ca valoare fractil a repartitiei statistice a actiunii;
- valoarea de proiectare (de calcul) a unei actiuni, F_d , este valoarea obtinuta prin multiplicarea valorii caracteristice, F_k , cu un coeficient partial de siguranta, γ_f , ce ia in considerare incertitudinile nealeatoare, cu caracter defavorabil asupra sigurantei structurale, ce caracterizeaza actiunea.

In afara celor doua valori mentionate anterior, pentru actiuni variabile avem si urmatoarele valori, Figura II.25 [3], [7]:

- valoare de combinatie a unei actiuni variabile, reprezentata de produsul $\psi_0 Q_k$;
- valoare frecventa a unei actiuni variabile, reprezentata de produsul $\psi_1 Q_k$; aceasta valoare este apropiata de o valoare centrala a repartitiei statistice a valorilor actiunii;
- valoare cvasipermanenta a unei actiuni variabile reprezentata de produsul $\psi_2 Q_k$; aceasta este o valoare exprimata ca o fractiune din valoarea caracteristica a actiunii printr-un coeficient, $\psi_2 \leq 1$; valoarea cvasipermanenta este folosita pentru verificarea la stari limita ultime ce implica actiuni accidentale si pentru verificarea la stari limita de serviciu reversibile. Valorile cvasipermanente sunt utilizate si pentru calculul efectelor pe termen lung.

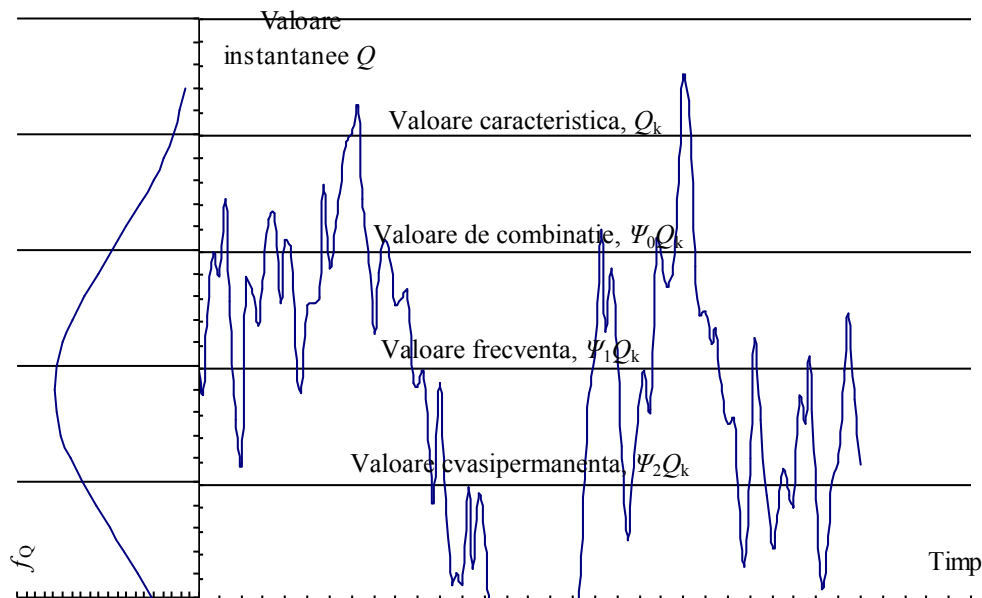


Figura II.25. Valori ale actiunilor variabile

Valoarea de calcul a efectului pe structura al actiunii, E_d , se calculeaza ca fiind efectul pe structura al actiunii, $E(F_d)$ inmultit cu coeficientul partial de siguranta γ_{Sd} :

$$E_d = \gamma_{Sd} \cdot E(F_d) \quad (\text{II.149}).$$

Coeficient partial de siguranta, γ_{Sd} evalueaza incertitudinile privind modelul de calcul al efectului in sectiune al actiunii, F_d . Alternativ, efectele actiunilor pe structura, E_d se pot determina si sub forma:

$$E_d = E(\gamma_{Sd} \cdot \gamma_f \cdot F_k) = E(\gamma_F \cdot F_k) \quad (\text{II.150}).$$

Rezistentele materialelor sunt reprezentate prin urmatoarele valori:

- valoarea caracteristica a unei rezistente a materialului structural, R_k , corespunde unei probabilitati mici de nedepasire a rezistentei; aceasta valoare se determina ca o valoare fractil inferior a repartitiei statistice a rezistentei materialului.
- valoarea nominala, stabilita deterministic, ce poate fi folosita ca valoare caracteristica in lipsa datelor statistice; aceasta valoare poate proveni din documente specifice de material sau de produs;
- valoarea de proiectare (de calcul) a unei rezistente, R_d , este o valoare obtinuta prin impartirea valorii caracteristice, R_k la un coeficient partial de siguranta, γ_m , ce ia in considerare incertitudinile nealeatoare, cu efecte defavorabile asupra sigurantei structurale, ce caracterizeaza rezistenta.

Valoarea de calcul a rezistentei sectionale, R_d , este valoarea rezistentei sectionale determinata de valoarea de calcul a rezistentei materialului, $R(X_d)$ inmultita cu coeficientul partial de siguranta

$$\frac{1}{\gamma_{Rd}}:$$

$$R_d = \frac{1}{\gamma_{Rd}} \cdot R(X_d) \quad (\text{II.151}).$$

Coeficientul partial de siguranta, $\frac{1}{\gamma_{Rd}}$ evalueaza incertitudinile asociate modelului de calcul al rezistentei sectionale, inclusiv abaterile geometrice. Alternativ, rezistenta sectionala, R_d se poate determina si sub forma:

$$R_d = R\left(\frac{1}{\gamma_{Rd}} \cdot \frac{1}{\gamma_m} \cdot X_k\right) = R\left(\frac{1}{\gamma_M} \cdot X_k\right) \quad (\text{II.152}).$$

Verificarea la starea limita de cedare a unei sectiuni/element sau imbinare se face cu relatia

$$E_d \leq R_d \quad (\text{II.153}),$$

unde:

E_d este valoarea de calcul a efectelor actiunilor in sectiune pentru starea limita ultima considerata, si

R_d este valoarea de calcul a rezistentei sectionale de aceeaasi natura cu efectul actiunii in sectiune.

Structura, infrastructura si terenul de fundare vor fi proiectate la stari limita ultime, astfel incat efectele actiunilor de calcul in sectiune, luate conform urmatoarelor combinatii factorizate [7]:

$$1,35 \sum_{j=1}^n G_{k,j} + 1,5 Q_{k,l} + \sum_{i=2}^m 1,5 \psi_{0,i} Q_{k,i} \quad (\text{II.154})$$

sa fie mai mici decat rezistentele de calcul in sectiune.

In relatia (II.154) simbolul „+” inseamna “in combinatie cu” , simbolul „ Σ ” inseamna “efectul combinat al” si:

$G_{k,i}$ este efectul pe structura al actiunii permanente i , luata cu valoarea sa caracteristica;

$Q_{k,i}$ - efectul pe structura al actiunii variabile i , luata cu valoarea sa caracteristica;

$Q_{k,l}$ - efectul pe structura al actiunii variabile, ce are ponderea predominanta intre actiunile variabile, luata cu valoarea sa caracteristica;

$\psi_{0,i}$ este un factor de simultaneitate al efectelor pe structura ale actiunilor variabile i ($i=2,3,...m$) luate cu valorile lor caracteristice, avand valoarea: $\psi_{0,i} = 0,7$, cu exceptia incarcarilor din depozite si a actiunilor provenind din impingerea pamantului, a materialelor pulverulente si a fluidelor/apei unde $\psi_{0,i} = 1,0$.

Actiunile permanente ce au un efect favorabil asupra sigurantei structurilor (de exemplu la starea limita de echilibru static) se considera conform urmatoarei combinatii [7]:

$$0,9 \sum_{j=1}^n G_{k,j} + 1,5 Q_{k,l} + \sum_{i=2}^m 1,5 \psi_{0,i} Q_{k,i} \quad (\text{II.155}).$$

In cazul actiunii seismice, relatia de verificare la stari limita ultime este [7]

$$\sum_{j=1}^n G_{k,j} + \gamma_I A_{Ek} + \sum_{i=1}^m \psi_{2,i} Q_{k,i} \quad (\text{II.156}),$$

unde:

A_{Ek} este valoarea caracteristica a actiunii seismice ce corespunde intervalului mediu de recurenta, IMR adoptat de cod ($IMR= 100$ ani in P100-1/2006);

$\psi_{2,i}$ - coeficient pentru determinarea valorii cvasipermanente a actiunii variabile Q_i ;

γ_I - coeficient de importanta a constructiei/structurii avand valorile in functie de clasa de importanta a constructiei.

Structura, infrastructura si terenul de fundare vor fi proiectate la stari limita de serviciu astfel incat efectele actiunilor de calcul pe structura/element/sectiune, luate conform urmatoarelor combinatii factorizate [7]:

a) Gruparea caracteristica de efecte structurale ale actiunilor pentru verificarea starilor limita ireversibile:

$$\sum_{j=1}^n G_{k,j} + Q_{k,1} + \sum_{i=2}^m \psi_{0,i} Q_{k,i} \quad (\text{II.157})$$

b) Gruparea frecventa de efecte structurale ale actiunilor pentru verificarea starilor limita reversibile:

$$\sum_{j=1}^n G_{k,j} + \psi_{1,1} Q_{k,1} + \sum_{i=2}^m \psi_{2,i} Q_{k,i} \quad (\text{II.158})$$

c) Gruparea cvasipermanenta de efecte structurale ale actiunilor pentru verificarea efectelor de lunga durata, a efectelor induse de cutremur si a aspectului constructiilor:

$$\sum_{j=1}^n G_{k,j} + \sum_{i=1}^m \psi_{2,i} Q_{k,i} \quad (\text{II.159a})$$

sau

$$\sum_{j=1}^n G_{k,j} + 0,6 \gamma_I A_{Ek} + \sum_{i=1}^m \psi_{2,i} Q_{k,i} \quad (\text{II.159b})$$

sa fie mai mici decat valorile limita ale criteriilor de serviciu considerate.

$\psi_{1,1}$ este coeficientul pentru determinarea valorii frecvente a actiunii variabile Q_1 .

Pentru a evalua nivelul de fiabilitate impus de sistemul de reglementari romanesti in domeniile actiunilor si betonului armat, se considera o grinda de beton armat proiectata conventional folosind codul *CR0-2005 – Bazele proiectarii structurilor in constructii* si *STAS 10107-0-90* pentru proiectarea elementelor de beton armat. Grinda este supusa unei combinatii de actiuni permanente, G si variabile, Q , aflate in diferite proportii exprimate prin raportul $Q/(G+Q)$. Pentru actiunea variabila s-a considerat un coeficient de variatie al maximelor anuale, V_{Q1} de 0,40, 0,60 si 1,00. Analiza de fiabilitate s-a efectuat folosind programul de calcul *VAP 1.5* (© Institute of Structural Engineering IBK, ETH Zurich, Switzerland).

In Figura II.26 se prezinta variatia valorilor indicelui de fiabilitate la incovoiere considerand o perioada de expunere a elementului de beton armat de 50 de ani. De asemenea, in Figura II.26, este reprezent si indicele de fiabilitate tinta in 50 de ani, care, conform *EN 1990* este $\beta_{50} = 3,8$. Se observa ca indicele de fiabilitate tinta nu este atins pentru valori ale raportului $Q/(G+Q)$ ce

depasesc 0,40...0,50, ceea ce inseamna contributii aproximativ egale ale actiunilor permanente si variabile. Indicele de fiabilitate scade, in toate cazurile, odata cu cresterea contributiei actiunii variabile in totalul actiunilor pe grinda de beton armat.

In Figura II.27 se prezinta, comparativ, variatia indicelui de fiabilitate la incovoiere si la forta taietoare pentru aceeasi grinda de beton armat. Reprezentarea este facuta pentru un coeficient de variatie al maximelor anuale, V_{Ql} de 0,60. Se observa valorile sistematic mai mari ale indicelui de fiabilitate la forta taietoare, comparativ cu valorile indicelui de fiabilitate la incovoiere. De asemenea, indicele de fiabilitate scade, atat la incovoiere cat si la forta taietoare, odata cu cresterea ponderii actiunii variabile fata de actiunea permanenta.

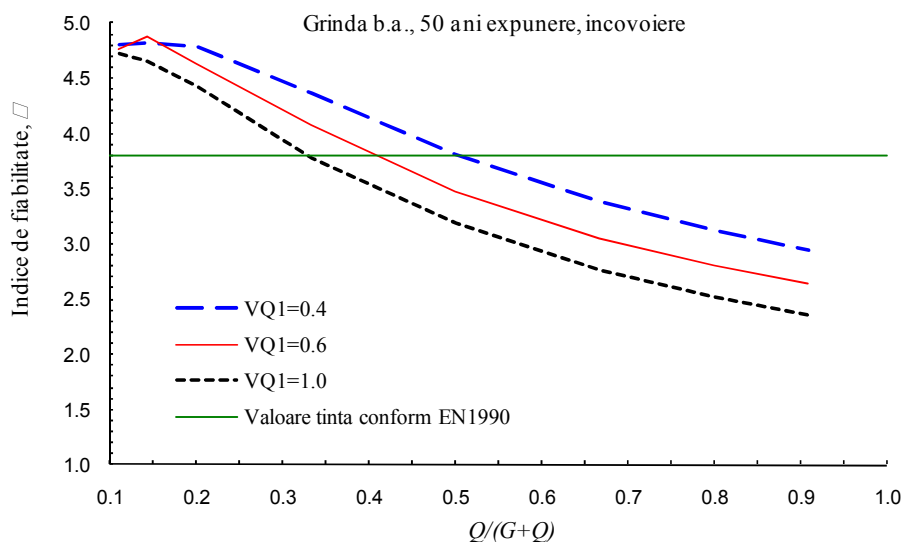


Figura II.26. Variatia indicelui de fiabilitate la incovoiere pentru o grinda de beton armat

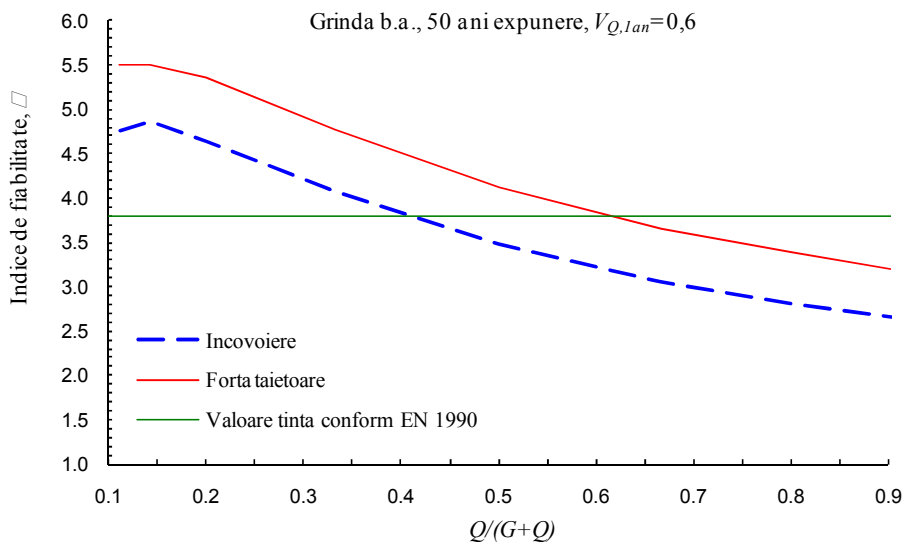


Figura II.27. Variatia indicelui de fiabilitate la incovoiere si la forta taietoare pentru o grinda de beton armat

Bibliografie:

1. Ang, A. H.-S., Tang, W. H., *Probability - Concepts in Engineering Planning and Design - Vol. II - Decision Risk & Reliability*, John Wiley & Sons, 1984
2. Ayub, B. M., McCuen, R., *Probability, Statistics, and Reliability for Engineers and Scientists, Second Edition*, Chapman&Hall/CRC, 2003
3. EN 1990 :2002, *Eurocode 0: Basis of Structural Design*, CEN, 2002
4. Lungu, D. & Ghiocel, D., *Metode probabilistice in calculul constructiilor*, Editura Tehnica, 1982
5. Madsen, H. O., Krenk, S., Lind, N. C., *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall, 1986
6. Melchers, R. E., *Structural Reliability Analysis and Prediction*, John Wiley & Sons, 2nd Edition, 1999
7. MTCT, CR0-2005 *Cod de proiectare. Bazele proiectarii structurilor in constructii*, 2005
8. Vacareanu, R., Aldea, A., Lungu, D., *Structural Reliability and Risk Analysis*, Editura Conspress, 2007
9. VAP 1.5, © Institute of Structural Engineering IBK, ETH Zurich, Switzerland

III. EVALUAREA ACȚIUNII ȘI A EFECTELOR VÂNTULUI PE CONSTRUCȚII

III.1. Circulația aerului. Stratul limită atmosferic

III.1.1. Introducere

Ingineria vântului se ocupă cu modelarea rațională a interacțiunii dintre vânt și construcții. Vântul cu viteza V generează un sistem de forțe aerodinamice, F_w ce acționează asupra unei construcții (considerată fixă și indeformabilă) și asupra elementelor sale componente, Figura III.1.1. Răspunsul este static, pentru construcții rigide și puternic amortizate, și este dinamic pentru construcții flexibile și / sau slab amortizate.

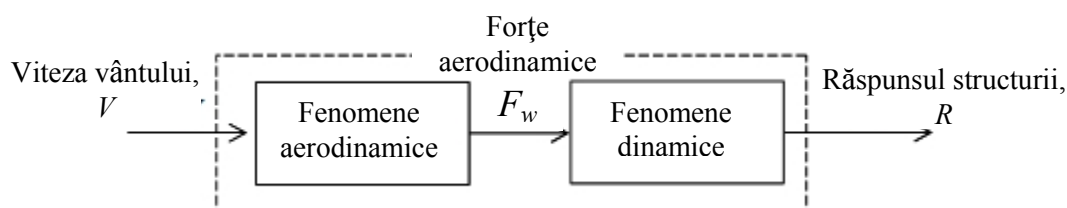


Figura III.1.1 Relația acțiune-răspuns pentru o construcție considerată fixă și indeformabilă [1]

La construcțiile ușoare, flexibile și slab amortizate, caracterizate de o formă aerodinamică sensibilă la acțiunea vântului, apar fenomene aeroelastice de interacțiune vânt-structură care modifică viteza vântului incident V , forța aerodinamică F_w și răspunsul structural R . În acest caz vântul produce asupra construcției o forță totală $F=F_w+F_a$, în care F_w este forța exercitată de vânt pe structura fixă și F_a este forța aeroelastică generată de mișcarea structurii, Figura III.1.2.

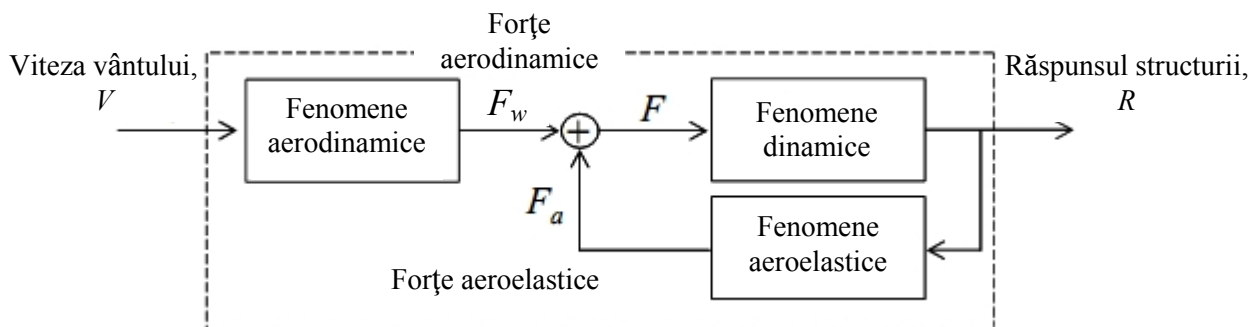


Figura III.1.2 Influența fenomenelor aeroelastice în relația acțiune-răspuns [1]

III.1.2. Circulația atmosferică

Fenomenele meteorologice care au loc în atmosfera Pământului sunt produse de radiațiile Soarelui. Acestea dau naștere regimului termic și câmpului de presiune responsabile pentru circulația maselor de aer. Vântul este mișcarea aerului în raport cu suprafața Pământului datorită încălzirii neuniforme de către Soare a atmosferei terestre. Mișcarea aerului este inițiată de diferențele de presiune între punctele situate la aceeași altitudine. Energia necesară pentru producerea acestor fenomene termodinamice și mecanice este dată de către Soare sub formă de căldură radiată. Pământul și atmosfera returnează la rândul lor o parte din energia primită prin emiterea de radiații calorice. Suprafața Pământului reține mai multă căldură decât atmosfera, obținându-se astfel un profil vertical al temperaturii aerului ce este liniar descrescător cu altitudinea, z . În atmosfera terestră, rata de scădere a temperaturii aerului uscat ascendent este de $1^{\circ}\text{C}/100\text{m}$. Datorită înclinării axei de rotație a Pământului față de planul orbitei sale în jurul Soarelui, intensitatea anuală a radiației solare și temperatura atmosferei vor fi mai ridicate în zonele ecuatoriale decât în zonele polare. Diferența dintre energia primită și returnată de sistemul Pământ-atmosferă variază, în principal, în funcție de unghiul diferit de inclinare al Soarelui la orizont, care provoacă o însorire maximă în zonele tropicale ecuatoriale și o însorire minimă a zonelor polare (Figura III.1.3).

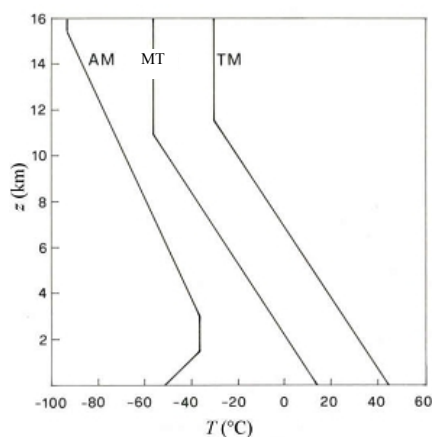


Figura III.1.3 Profilul vertical al temperaturii atmosferice medii [1]

Circulația primară

În zonele tropicale ecuatoriale, temperatura medie (TM, tropicală maximă) este mai mare decât media terestră (MT) și se instaurează un sistem de presiune joasă; în zonele polare temperatura medie (AM, arctic minim) este mai mică decât media terestră (MT) și se instaurează un sistem de presiune înaltă. În cazul în care temperatura nu ar fi afectată și de alți factori, circulația curenților de aer ar fi, în fiecare emisferă, monocelulară, caracterizată de o singură celulă extinsă de la Pol la Ecuator (Figura III.1.4).

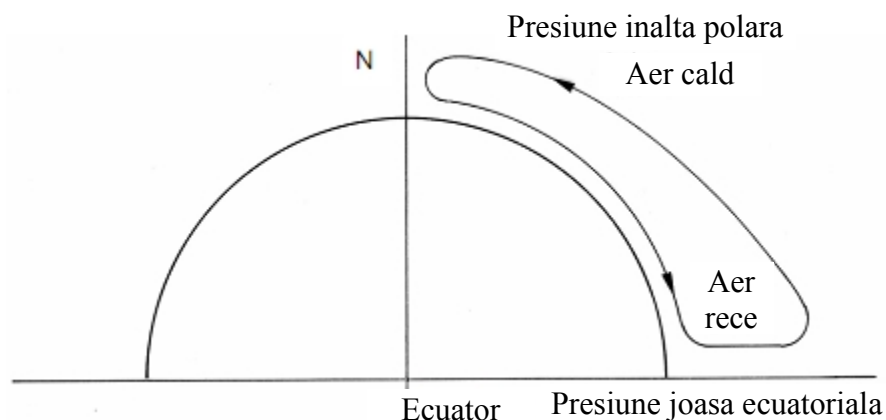


Figura III.1.4 Circulația ideală monocelulară [1]

În realitate, distribuția neuniformă a maselor de apă și a zonele continentale duce la formarea unei benzi de presiune înaltă sub-tropicală și a unei benzi de presiune scăzută sub-polară. Aceste fenomene conduc, în fiecare emisferă, la un sistem de circulație tri-celular (Figura III.1.5).

Vânturile sunt numite alizee, vânturi vestice și vânturi estice în funcție de latitudinea la care se produc. Ansamblul lor constituie circulația primară și include vânturi care se dezvoltă pe perioade lunare sau sezoniere la scară globală. Aceste vânturi cu viteze moderate (de obicei, mai puțin de 4-5 m/s) determină clima Pământului, dar au o influență mică asupra construcțiilor.

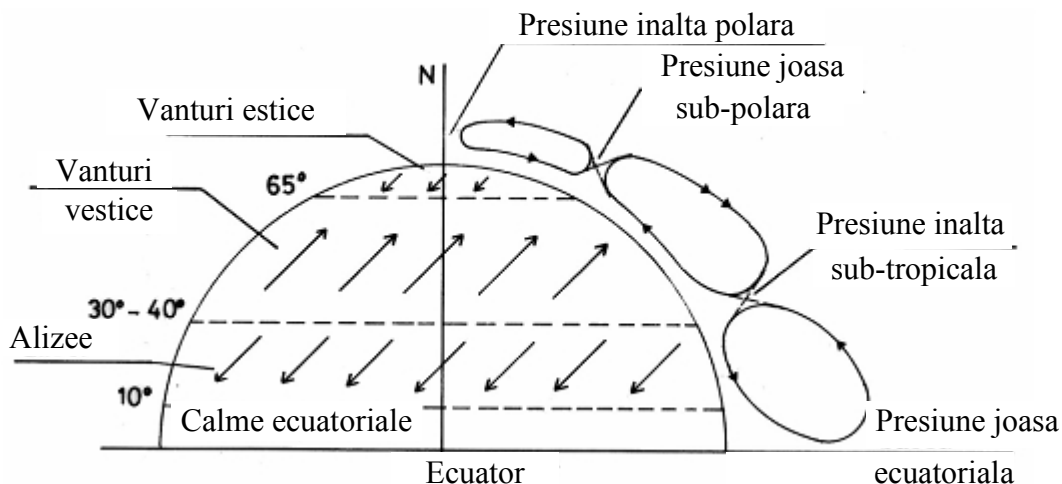


Figura III.1.5 Circulația efectivă tricelulară [1]

Circulația secundară

Circulația secundară este un ansamblu de vânturi care se formează între zonele de presiune mică și mare, produse de încălzirea sau răcirea locală a straturilor inferioare ale atmosferei (Figura III.1.6). Aceste vânturi se dezvoltă pe perioade cuprinse între câteva zile și o săptămână, în zone

cu dimensiuni cuprinse între câteva sute și o mie de kilometri. Spre deosebire de circulația primară, circulația secundară determină vremea locală. Circulația secundară include cicloane, anti-cicloane și musoni.

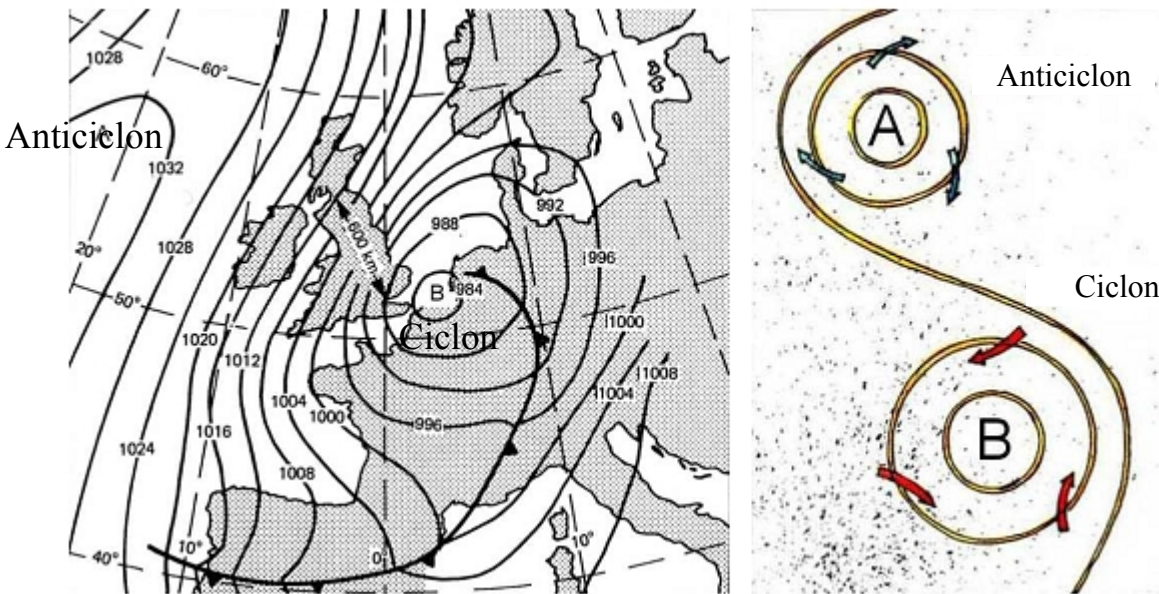


Figura III.1.6 a) Hartă izobarică; b) Ciclone și anticiclone [1]

Zonele ciclonice sunt regiuni ale sistemului baric în care presiunea aerului scade de la periferie spre centru și în care mișcarea maselor de aer este convergentă. Cicloanele sunt vânturi ce suflă paralel cu izobarele concentrice în vecinătatea zonelor joasă presiune (Figura III.1.6). Circulația este în sens invers acelor de ceasornic în emisfera nordică, și în sensul acelor de ceasornic în cea sudică.

În funcție de zona în care se formează, cicloanele sunt împărțite în cicloane extra-tropicale și tropicale. Cele mai puternice cicloanele extra-tropicale provin din întâlnirea, în fașia sub-polară, a fluxului de aer rece polar purtat de vânturile estice cu fluxul de aer cald tropical transportat de către vânturile vestice (Figura III.1.5).

Cicloanele tropicale (Figura III.1.7) își au originea în zona calmelor ecuatoriale (Figura III.1.5), și își adună energia din căldură latentă de vaporizare eliberată de vaporii de apă. În comparație cu cicloanele extra-tropicale, cicloanele tropicale sunt de dimensiuni mai mici, dar au viteze și potențial distructiv mult mai mari. În SUA, cicloanele tropicale sunt numite uragane în cazul în care depășesc viteza de 120 km/h; același fenomen poartă denumirea de taifun în Extremul Orient și, pur și simplu ciclon, în Australia și în Oceanul Indian.

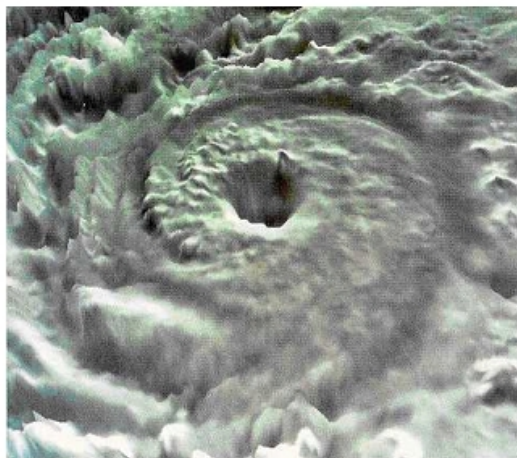


Figura III.1.7 Ciclon tropical [1]

Zonele anticiclonice sunt regiuni ale sistemului baric în care presiunea aerului crește de la periferie spre centru și în care mișcarea maselor de aer este divergentă. Anti-cicloanele sunt vânturi ce suflă paralel cu izobarele concentrice în vecinătatea zonelor de presiune ridicată (Figura III.1.6). Circulația este în sens orar în emisfera nordică, și în sensul anti-orar în cea sudică. În comparație cu cicloanele, în general, anti-cicloanele au dimensiuni mai mari și proprietăți care produc vreme relativ stabilă și vânt de intensitate slabă.

Vântul musonic ia naștere pe continentul asiatic (în apropierea Oceanului Indian) și este produs de contrastul termic sezonier dintre ocean și continent; musonul este considerat o parte integrantă a circulației secundare.

Vânturile locale sunt mișcări ale maselor de aer care sunt încorporate în circulația secundară, fără a schimba proprietățile acesteia. Aceste vânturi au extindere limitată (în jur de câțiva kilometri) și sunt de scurtă durată (rareori mai mult de câteva ore), dar pot ajunge la viteze foarte mari. În general, vânturile locale sunt împărțite în două categorii: (i) cele produse de condiții geografice speciale (briza, föhnul, bora) și (ii) cele produse de condiții atmosferice speciale (furtuni temporare, tornade). În Tabelul III.1.1 este prezentată sintetic clasificarea fenomenelor eoliene descrise anterior.

Stadiul actual al cunoștințelor nu permite formularea unui model matematic capabil să ia în considerare toate fenomenele eoliene menționate anterior. Cu toate acestea, există mai multe modele parțiale care pot reprezenta, cu diferite nivele de încredere, tipurile individuale de vânt considerate independent. Cicloanele extra-tropicale sunt, de obicei, fenomenele eoliene cele mai severe, ca intensitate și probabilitate de producere, la care sunt supuse construcțiile din țările cu climă temperată (și din România, în particular).

Tabel III.1.1 Clasificarea fenomenelor eoliene [1]

Circulația primară	Alizee	
	Vânturi vestice	
	Vânturi estice	
Circulația secundară	Cicloane	Extra-tropicale
		Tropicale
	Anti-cicloane	
	Musoni	
Vânturi locale	Produse de condiții geografice speciale	Briza
		Föhnul
		Bora
	Produse de condiții atmosferice speciale	Furtuni
		Tornade

Aerul supus doar gradientului de presiune se mișcă dinspre zona de presiune ridicată spre zona de presiune scăzută, Figura III.1.8.

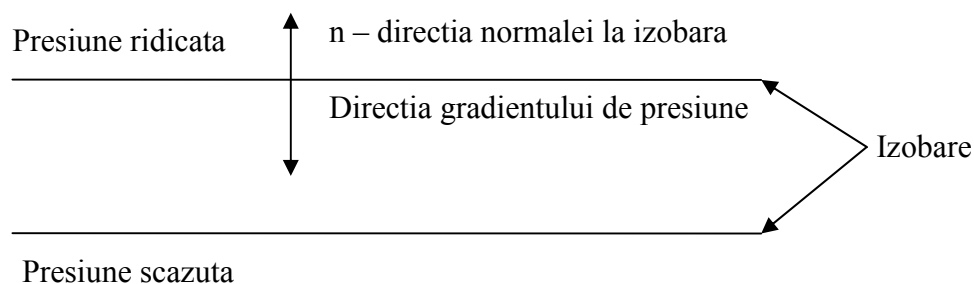


Figura III.1.8. Deplasarea aerului supus gradientului de presiune

Pe lângă forța produsă de gradientul de presiune, apare și forța lui Coriolis. Aceasta acționează către dreapta față de direcția de mișcare în emisfera nordică, și către stanga față de direcția de mișcare în emisfera sudică; la Ecuator, forța lui Coriolis este egală cu zero. În emisfera nordică, forța lui Coriolis face ca o particulă de aer ce se deplasează către nord să vireze către est și o particulă ce se deplasează către sud să vireze către vest. Forța lui Coriolis se determină cu relația:

$$F_c = m \cdot f \cdot V \quad (\text{III.1.1})$$

unde:

m – masa particulei;

V – viteza particulei;

f – parametrul lui Coriolis (vezi tabel III.1.2); $f = 2 \cdot \omega \cdot \sin \varphi$;

ω – viteza unghiulară de rotație a Pământului egală cu 15 grade de latitudine pe oră;

φ – latitudinea geografică (exprimată în radiani).

Tabel III.1.2. Valorile parametrului lui Coriolis

Latitudine, φ (grade)	Parametrul lui Coriolis, $f(s^{-1})$
0	0
30	$0,73 \cdot 10^{-4}$
45	$1,03 \cdot 10^{-4}$
60	$1,26 \cdot 10^{-4}$
90	$1,46 \cdot 10^{-4}$

La o înălțime suficient de mare, efectele produse asupra vântului de către frecarea cu terenul devin neglijabile și mișcarea orizontală a aerului în raport cu suprafața Pământului este dată de echilibrul dintre forța produsă de gradientul de presiune, forța lui Coriolis și forța centrifugă (în cazul în care izobarele sunt curbe). La atingerea stării de echilibru vântul curge în lungul izobarelor. Folosind această observație, Buys-Ballot (chimist și meteorolog olandez; 1817-1890) a formulat următoarea lege: în emisfera nordică, dacă o persoană stă cu spatele la vânt, zona cu presiune ridicată va fi în dreapta sa și zona cu presiune scăzută va fi în stanga sa. Această lege este valabilă la altitudini mari.

Pe măsură ce ne apropiem de suprafața terenului, forțele de frecare a maselor de aer cu terenul, ce sunt transmise prin forfecarea straturilor de aer în stratul limită atmosferic, devin din ce în ce mai importante. Această forță acționează în direcție opusă față de direcția curgerii; pentru a se obține echilibrul vectorial al forțelor, direcția curgerii aerului nu mai este paralelă cu izobarele, ci este îndreptată spre centrul de presiune joasă. Deci, pe măsură ce ne apropiem de suprafața terenului, vectorul vitezei vântului se rotește către centrul de presiune joasă. Acest efect este cunoscut sub numele de spirala Ekman. Totuși, schimbarea de direcție a vectorului viteză pe înălțimea construcțiilor înalte este redusă. La înălțimi mici, efectele produse asupra vântului de către frecarea cu terenul devin semnificative și mișcarea orizontală a aerului în raport cu suprafața Pământului este dată de echilibrul dintre forța produsă de gradientul de presiune, forța lui Coriolis, forța centrifugă (în cazul în care izobarele sunt curbe) și forța de frecare. La atingerea stării de echilibru, vântul traversează izobarele sub un unghi α ce este cu atât mai mare cu cât altitudinea z este mai mică, Figura III.1.9.

Pentru a reprezenta configurația vântului într-un ciclon extra-tropical, se iau în considerare două zone atmosferice cu proprietăți diferite. Se definește înălțimea de gradient ca fiind cota z_G deasupra căreia mișcarea maselor de aer nu este afectată de forța de frecare cu terenul; această înălțime de gradient variază între 1000 m și 3000 m în funcție de viteza vântului și rugozitatea terenului, cea din urmă exprimată printr-un parametru numit lungime de rugozitate, z_0 . Zona de la

nivelul terenului la înălțimea de gradient este numită stratul limită atmosferic. Mai sus de înălțimea de gradient se extinde atmosfera netulburată.

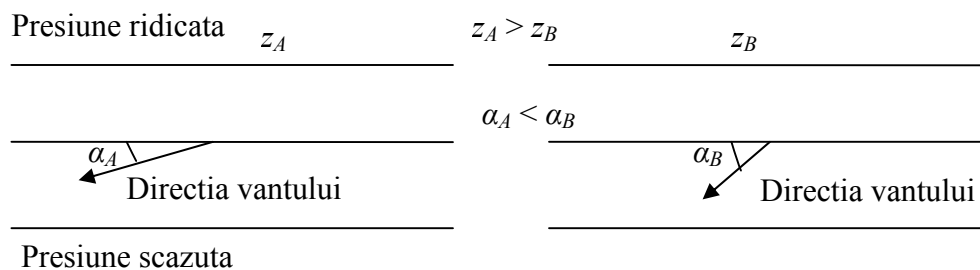


Figura III.1.9. Deplasarea aerului supus forței produse de gradientul de presiune, forței lui Coriolis și forței de frecare

Viteza vântului în atmosfera netulburată este constantă, poartă numele de viteză geostrofică – pentru izobare drepte - (sau viteză de gradient – pentru izobare curbe) și se notează cu V_g . Această viteză are direcția paralelă cu izobarele, și este cu atât mai mare cu cât izobarele sunt mai apropiate unele față de altele. În stratul limită atmosferic curgerea aerului este influențată de forța de frecare exercitată de teren orientată în sens opus vitezei vântului V . Această forță de frecare este zero la înălțimea de gradient și crește pe măsură ce ne apropiem de teren, determinând o reducere a vitezei. Rezultatul este un profil conic de viteze peste care se suprapune, din nou din cauza frecării cu terenul, o fluctuație tri-dimensională a vitezei având media zero, numită turbulență atmosferică (Figura III.1.10). Turbulența este maximă aproape de suprafața terenului și dispare la înălțimea de gradient.

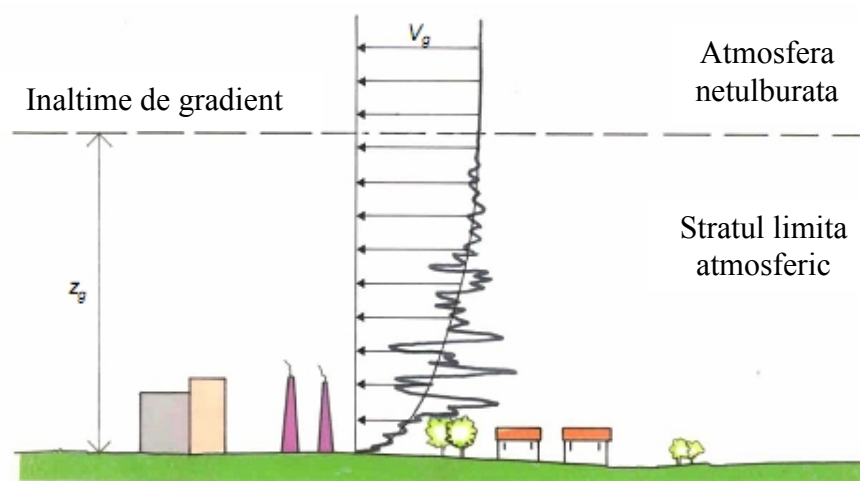


Figura III.1.10. Profilul vitezei medii a vântului și turbulența atmosferică [1]

III.1.3. Pierderi produse de vânt

Dintre pierderile economice produse de acțiunile din hazard natural, cele produse de fenomenele eoliene extreme sunt printre cele mai importante. În SUA, în perioada 1986-1993, uraganele și tornadele au produs pierderi asigurate de 41 miliarde de USD, în timp ce toate celelalte hazarduri naturale au produs pierderi asigurate de 16,8 miliarde USD [2]. În UE, în iarna anului 1990, patru furtuni puternice au produs pierderi economice de 15 miliarde USD și pierderi asigurate de 10 miliarde USD [2]. Situația pierderilor produse de hazarduri naturale poate fi diferită dacă se compară SUA și Japonia, și se consideră seismicitatea extrem de severă a teritoriului Japoniei. Astfel, dacă se consideră pierderile relative produse de vânt, cutremur și inundații în perioada 1955-2004 în SUA și Japonia se observă o inversare a primelor două hazarduri naturale. Datele asupra pierderilor relative [3] sunt date în Tabelul III.1.3 și reprezentate în Figurile III.1.11 și III.1.12.

În Tabelul III.1.4 sunt date pierderile provocate de vânturi extreme în ultimii 25 de ani ai secolului XX în lume [2].

Tabel III.1.3. Pierderi relative produse de hazarduri naturale între 1955 și 2004 în SUA și Japonia [3]

Hazard natural	SUA		Japonia	
	1955-2004	2000-2004	1955-2004	2000-2004
Vânt	69%	89%	22%	36%
Inundații	12%	4%	2%	4%
Cutremur	11%	5%	76%	60%
Altele	8%	2%	-	-

Tabel III.1.4. Evenimente eoliene extreme în ultimii 25 de ani ai secolului XX [2]

An	Nume	Țară sau regiune	Pierderi economice, milioane USD	Pierderi de vieți omenești
1974	Ciclonul Tracy	Australia	500	52
1987	Furtuni	Europa de vest	3700	17
1989	Uraganul Hugo	Caraibe, SUA	9000	61
1990	Furtuni	Europa de vest	15000	230
1992	Uraganul Andrew	SUA	30000	44
1999	Furtuni	Franța	10000	140

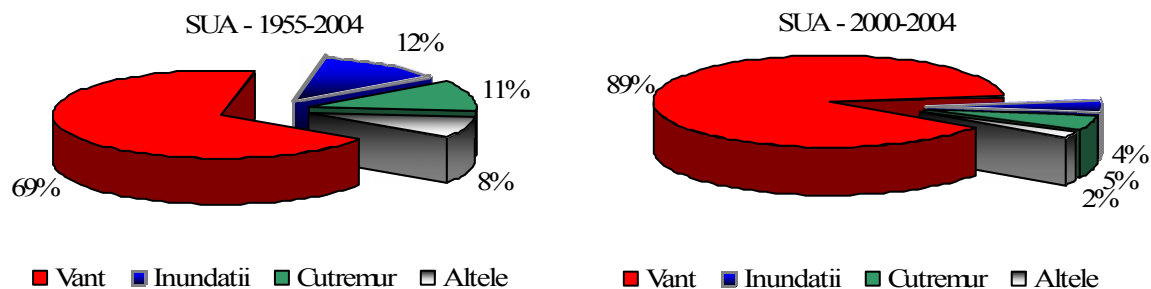


Figura III.1.11. Repartiția pierderilor relative în SUA

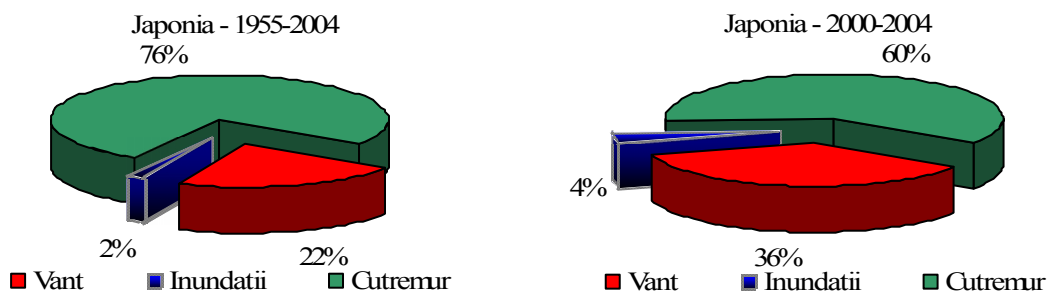


Figura III.1.12. Repartiția pierderilor relative în Japonia

Bibliografie

1. CNR-DT 207/2008: Istruzioni per la valutazione delle azioni e degli effetti del vento sulle costruzioni, CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
2. J. D. Holmes, 2004. Wind Loading of Structures, Taylor & Francis
3. H. Kikugawa, B. Bienkiewicz. Wind Damages and Prospects for Accelerated Wind Damage Reduction in Japan and in the United States,
<http://www.pwri.go.jp/eng/ujnr/joint/37/paper/41bienki.pdf>

III.2. Viteza vântului. Presiunea dinamică a vântului

III.2.1. Elemente generale

Valorile instantanee ale vitezei vântului și ale presiunii dinamice a vântului conțin o componentă medie și o componentă fluctuantă față de medie, Figura III.2.1.

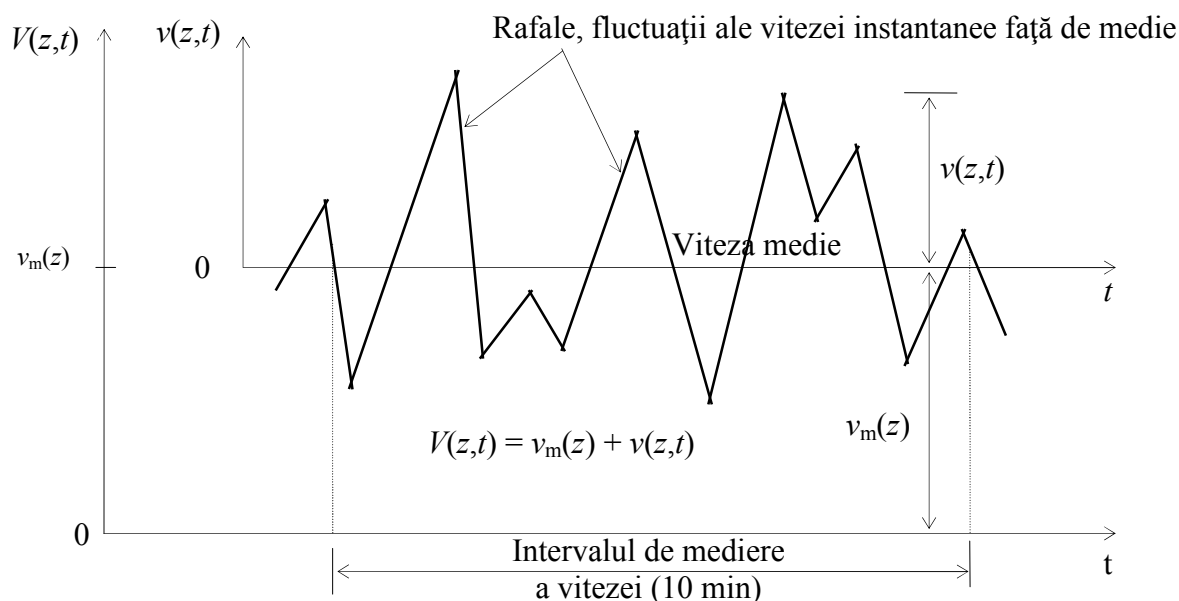


Figura III.2.1 Procesul stochastic al vitezei vântului la înălțimea z deasupra terenului, $V(z,t)$ [4]

III.2.2. Valori de referință ale vitezei și presiunii dinamice a vântului

Valoarea de referință a vitezei vântului (viteza de referință a vântului) v_b este viteza vântului mediată pe o durată de 10 min., măsurată la o înălțime de 10 m deasupra terenului, în câmp deschis (având lungimea de rugozitate $z_0 = 0,05$ m) și exprimată cu o probabilitate de depășire de 2% într-un an (respectiv cu un intervalul mediu de recurență $IMR=50$ de ani).

Medierea vitezei vântului pe o durată de 10 min conduce la o definiție stabilă a vitezei vântului valabilă pentru o suprafață mare și pentru un interval de timp suficient de lung pentru dezvoltarea completă a răspunsului structurii.

În câmp deschis se recomandă următoarele relații de conversie între vitezele vântului mediate pe diferite intervale de timp [4]:

$$1,05 \cdot v_b^{1h} = v_b^{10min} = 0,84 \cdot v_b^{1min} = 0,67 \cdot v_b^{3s} \quad (III.2.1)$$

Similar, relațiile de conversie ale presiunii vântului în câmp deschis pentru diferite intervale de mediere ale vitezei se estimează cu relația [4]:

$$1,1 \cdot q_b^{1h} = q_b^{10min} = 0,7 \cdot q_b^{1min} = 0,44 \cdot q_b^{3s} \quad (III.2.2)$$

Valoarea de referință a vitezei vântului având o probabilitate anuală de depășire de 2% se determină din analiza statistică a valorilor maxime anuale ale vitezei mediate a vântului.

Numărul de ani pentru care există înregistrări meteorologice se recomandă să fie comparabil cu cel al intervalului mediu de recurență asociat vitezei de referință (50 de ani). Pentru zonarea acțiunii vântului se recomandă utilizarea în toate stațiile meteo a aceluiași tip de repartiție de probabilitate a valorilor extreme.

Dintre repartițiile de valori extreme adecvate pentru descrierea maximelor anuale ale vitezei vântului se recomandă repartiția Gumbel pentru maxime. În această repartiție, valoarea maximă anuală a vitezei medii a vântului având probabilitatea de nedepășire într-un an, $p = 0,98$ este:

$$v_{0,98} = m_1 \cdot (1 + 2,593 \cdot V_1) \quad (III.2.3)$$

unde m_1 și V_1 sunt respectiv media și coeficientul de variație al maximelor anuale ale vitezei medii a vântului. Coeficientul de variație al valorilor maxime anuale ale vitezei mediate a vântului, în România, este în general mai mic ca 0,35.

Valoarea maximă anuală a vitezei medii a vântului având probabilitatea de nedepășire într-un an, p diferită de 0,98 poate fi stabilită cu expresia următoare valabilă pentru repartiția Gumbel a maximelor anuale ale vitezei medii a vântului:

$$v_{prob} = \frac{1 - \left[0,45 + \frac{\ln(-\ln p)}{1,282} \right] \cdot V_1}{1 + 2,593 \cdot V_1} \cdot v_{0,98} \quad (III.2.4)$$

Evaluarea cu acuratețe a vitezei de referință a vântului într-un amplasament implică parcurgerea următoarelor etape:

- (i) achiziția, controlul și corectarea măsurătorilor vitezelor medii și a direcțiilor vântului în amplasament;
- (ii) transformarea datelor măsurate în valori în concordanță cu definiția vitezei de referință a vântului;
- (iii) analiza probabilistică a datelor transformate la (ii).

Datele asupra vitezei vântului înregistrate într-un amplasament trebuie să fie fiabile și să constituie un set omogen micrometeorologic.

Datele sunt fiabile dacă:

- instrumentele folosite la măsurare au fost calibrate adecvat și s-au comportat corespunzător;
- senzorul a fost expus astfel încât nu a fost influențat de condiții locale de curgere produse de un obstacol din vecinătatea sa;
- viteza vântului nu depinde de temperatura aerului (stratificarea atmosferică poate fi considerată neutră); ipoteza este valabilă pentru viteze mai mari de 10 m/s măsurate la 10 m deasupra terenului în câmp deschis.

Un set de date este omogen micrometeorologic dacă toate datele din set au fost obținute în condiții micrometeorologice identice sau echivalente. Condițiile sunt determinate de următorii factori:

- (i) timpul de mediere – folosind relația (III.2.1), toate datele trebuie ajustate pentru un timp de mediere comun;
- (ii) înălțimea deasupra terenului – folosind relația (III.2.19), toate datele trebuie ajustate pentru o înălțime comună;
- (iii) rugozitatea terenului înconjurător – folosind relația (III.2.22), toate datele trebuie ajustate pentru o rugozitate comună. Relația (III.2.22) este aplicabilă în teren orizontal, dacă în fiecare stație meteorologică rugozitatea terenului este uniformă pe o distanță, măsurată de la anemometru, de 100 de ori mai mare ca înălțimea la care este amplasat anemometrul.

Valoarea de referință a presiunii dinamice a vântului este presiunea determinată cu valoarea de referință a vitezei vântului:

$$q_b = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_b^2 \quad (\text{III.2.5}).$$

Pentru aerul standard la 20°C, densitatea aerului este de $\rho_a = 1.25 \text{ kg/m}^3$. În relația (III.2.5), presiunea de referință este obținută în Pascali, dacă viteza de referință a vântului se introduce în metri/secundă.

III.2.3. Zonarea acțiunii vântului în România

Generația de standarde de acțiuni din țările avansate din anii '70 ai secolului XX a introdus concepțiile inovative ale teoriei statistice a valorilor extreme și a definit intensitățile acțiunilor din hazard natural (cutremur, vânt, zăpada ș.a.) cu anumite intervale medii de recurență (perioade medii de revenire), în ani.

În prezent, practica internațională utilizează valori caracteristice ale acțiunilor din vânt având intervalul mediu de recurență standard de 50 ani, $IMR = 50$ ani. Aceste valori au probabilitatea de depășire 64% în 50 ani și 2% într-un an.

Zonarea hazardului natural din vânt în România a avut ca date de intrare valorile maxime anuale ale vitezei vântului la 10 m deasupra terenului, măsurate în peste 140 de stații meteorologice ale Administrației Naționale de Meteorologie, până în anul 2005. Rezultatele analizei statistice sunt valorile caracteristice ale vitezei vântului având $IMR = 50$ ani, determinate în repartiția de valori extreme tip I, Gumbel pentru maxime. Repartiția de probabilitate Gumbel pentru maxime este recomandată în ultimele 4 ediții ale standardului american *ASCE 7/(1988, 1993, 2000, 2006)* - *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, Documentul *Joint Committee on Structural Safety, Wind Loads*, 1995, 2000 și în Documentul *ISO/TC 98/SC3/WG 2/N 129 rev, Draft for DP 4354, Wind Actions on Structures* și justificată de corelația între coeficienții de oblicitate și de variație ai maximelor anuale măsurate în stațiile meteorologice din România pe o durată de peste 50 de ani.

Pe baza valorilor de referință ale vitezei vântului s-au determinat valorile de referință ale presiunii dinamice a vântului pentru stațiile meteorologice cu înregistrări. Valorile din harta de zonare (vezi Figura III.2.2) pentru valorile de referință ale presiunii dinamice a vântului având 50 ani interval mediu de recurență, sunt presiuni mediate pe 10 min, conform exigențelor din SR EN 1991-1-4.

Valoarea de referință a vitezei vântului pentru un amplasament se determină pe baza valorii de referință a presiunii dinamice a vântului corespunzătoare amplasamentului, luată din harta de zonare din Figura III.2.2, și este determinată cu relația:

$$v_b = \sqrt{\frac{2 \cdot q_b}{\rho}} = \sqrt{1,6 \cdot q_b} \quad (\text{III.2.6})$$

unde ρ este densitatea aerului, egală cu $1,25 \text{ kg/m}^3$, și valoarea de referință a presiunii dinamice a vântului se introduce în Pa ($1 \text{ kPa} = 1000 \text{ Pa}$).

Harta de zonare a valorilor de referință ale presiunii dinamice a vântului din Figura III.2.2 este valabilă pentru altitudini mai mici sau egale cu 1000 m.

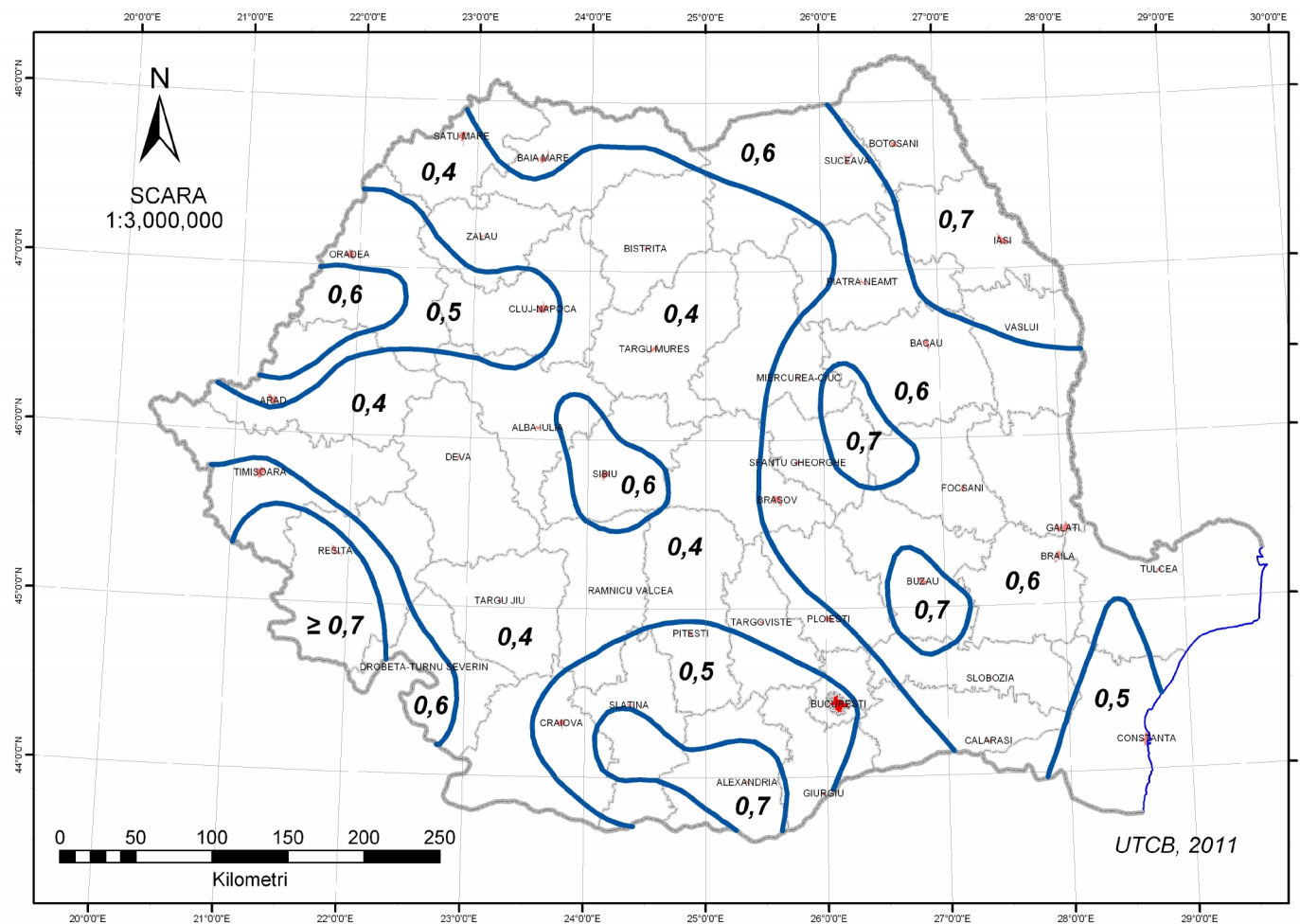


Figura III.2.2 Harta de hazard din vânt.
Valori de referință ale presiunii dinamice a vântului, q_b în kPa, având $IMR = 50$ ani

Nota. Pentru altitudini peste 1000m valorile se corectează cu relația (III.2.7)

Orientativ, valoarea de referință a presiunii dinamice a vântului pentru un amplasament aflat la o altitudine, z_{alt} mai mare ca 1000 m se poate determina cu relația:

$$q_{b,z_{alt}} = c_{alt} \cdot q_b \quad (III.2.7)$$

unde :

$q_{b,z_{alt}}$ - este valoarea de referință a presiunii dinamice a vântului pentru un amplasament aflat la o altitudine, z_{alt} mai mare ca 1000 m;

q_b - este valoarea de referință a presiunii dinamice a vântului în amplasament din harta de zonare din Figura III.2.2;

c_{alt} - este factorul de altitudine ce se poate determina aproximativ cu relația:

$$c_{alt} = 1 + 1,6 \cdot \left(\frac{z_{alt}}{1000} - 1 \right) \quad (III.2.8).$$

Pentru amplasamente aflate la altitudini mai mari de 1000 m și în zonele cu o expunere specială la vânt (sud-vestul Banatului), se recomandă consultarea *ANM* pentru obținerea de date primare și a instituțiilor de specialitate din domeniul construcțiilor pentru analiza acestor date.

Relațiile (III.2.7) și (III.2.8) au fost calibrate pe baza datelor obținute în stațiile meteorologice din România situate la peste 1000 m altitudine. Folosind maximele anuale ale vitezei medii a vântului măsurate la o înălțime de 10 m și mediate pe 10 minute s-au determinat valorile de referință ale presiunii dinamice a vântului în cele 10 stații meteo, Tabelul III.2.1.

Tabel III.2.1. Valori caracteristice ale presiunii dinamice a vântului în stații meteorologice din România situate la altitudini de peste 1000 m

Nr. crt.	Statia meteorologică	Altitudinea, m	q_b , Pa
1.	Băișoara	1360	307
2.	Fundata	1384	833
3.	Semenic	1432	1027
4.	Cuntu	1450	626
5.	Păltiniș	1453	1094
6.	Rarău	1536	822
7.	Parang	1548	501
8.	Lăcăuți	1776	1052
9.	Iezer	1785	871
10.	Vlădeasa	1836	978

Corelația între valorile caracteristice ale presiunii dinamice a vântului determinate pe baza datelor de observatie și pe baza relațiilor (III.2.7) și (III.2.8) din cod este aratata în Figura III.2.3.

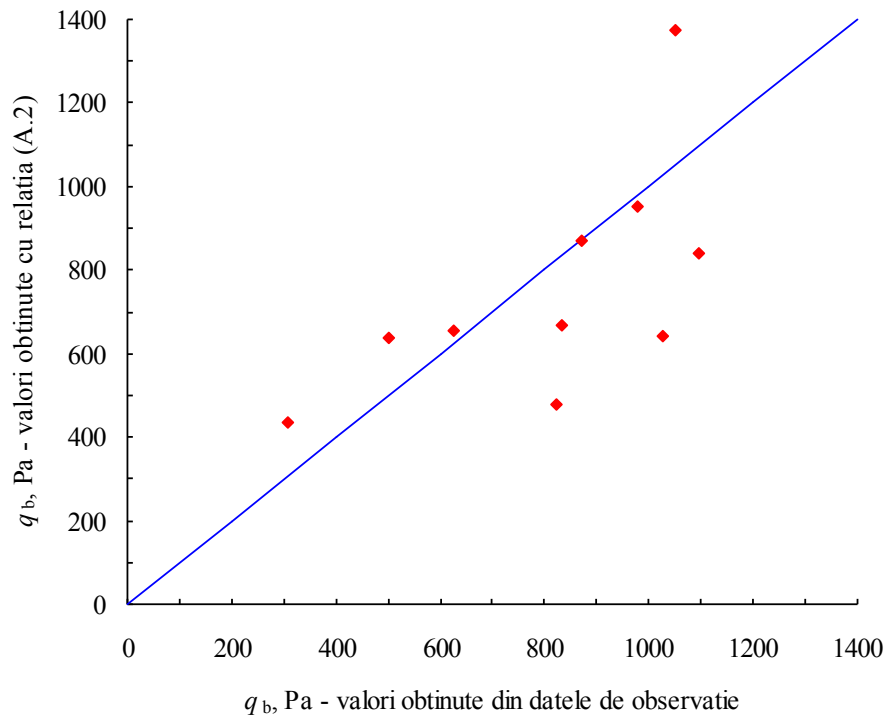


Figura III.2.3. Corelația între valorile caracteristice ale presiunii dinamice a vântului determinate pe baza datelor de observatie și pe baza relațiilor (III.2.7) și (III.2.8)

Valorile caracteristice ale vitezelor vântului definite cu 100 ani și 10 ani interval mediu de recurență se pot calcula simplificat în funcție de valoarea caracteristică a vitezei vântului având 50 ani interval mediu de recurență, cu următoarele relații:

$$\frac{v_{b, IMR=100 ani}}{v_{b, IMR=50 ani}} \cong 1,10 \quad (III.2.9)$$

$$\frac{v_{b, IMR=10 ani}}{v_{b, IMR=50 ani}} \cong 0,75 \quad (III.2.10)$$

și, în consecință,

$$\frac{q_{b, IMR=100 ani}}{q_{b, IMR=50 ani}} \cong 1,15 \quad (III.2.11)$$

$$\frac{q_{b, IMR=10 ani}}{q_{b, IMR=50 ani}} \cong 0,65 \quad (III.2.12).$$

Relațiile (III.2.9) și (III.2.10) au la bază rapoarte de fractili determinate în repartiția Gumbel pentru maxime pentru diferite valori ale coeficientului de variație a valorilor maxime anuale ale vitezelor vântului. Rezultatele analizei sunt prezentate în Figura III.2.4.

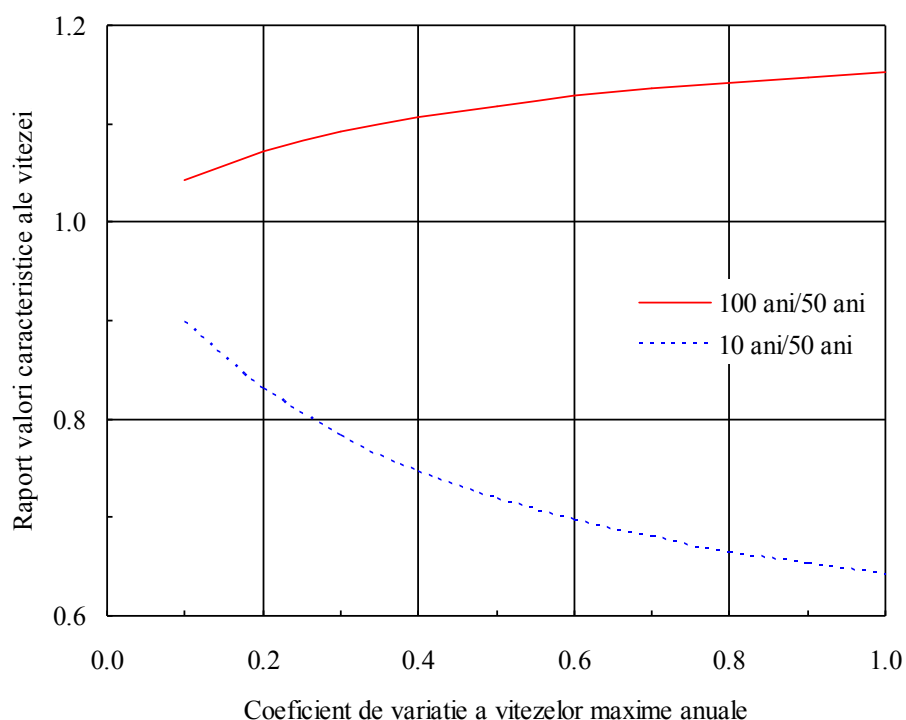


Figura III.2.4. Rapoarte ale valorilor caracteristice ale vitezei maxime anuale a vântului

$$\frac{v_{b, IMR=100 \text{ ani}}}{v_{b, IMR=50 \text{ ani}}} \text{ și } \frac{v_{b, IMR=10 \text{ ani}}}{v_{b, IMR=50 \text{ ani}}}$$

În Câmpia Română, pentru orașul București, s-au indicat și valorile factorului direcțional c_{dir} pentru vitezele maxime ale vântului pe 16 direcții, Tabelul III.2.2.

Tabel III.2.2. Bucuresti. Factorul direcțional al vitezei vântului având 50 ani perioada medie de revenire , c_{dir} ¹⁾ [3]

Direcția	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE
c_{dir}	0,34	0,52	0,97	0,83	0,48	0,38	0,38	0,34
Direcția	S	SSV	SV	VSV	V	VNV	NV	NNV
c_{dir}	0,41	0,41	0,52	0,52	0,55	0,42	0,31	0,38

¹⁾ Pentru toate direcțiile, $c_{dir} = 1.0$

III.2.4. Rugozitatea terenului. Valori medii ale vitezei și presiunii dinamice a vântului

Rugozitatea terenului este descrisă de lungimea de rugozitate, z_0 ; aceasta este o măsură a mărimii vârtejurilor ce se formează datorită frecării dintre aerul în mișcare și suprafața

terenului și are valori cuprinse între 0,003 m și 3,0 m, în funcție de categoria de teren. Pentru evaluarea lungimii de rugozitate a terenului din amplasamentul unei construcții este necesară determinarea categoriei de teren corespunzătoare amplasamentului.

În Tabelul III.2.3 sunt clasificate categoriile de teren în funcție de valoarea lungimii de rugozitate, z_0 .

Determinarea categoriei de teren și a lungimii de rugozitate corespunzătoare acestuia se poate face prin inspecție vizuală (documentare fotografică), relevee cartografice și/sau imagini din satelit. Figurile III.2.5...III.2.8 prezintă exemple de categorii de teren cu diferite lungimi de rugozitate folosind documentarea fotografică (a) și imagini din satelit (b) pentru diferite categorii de teren.

Tabel III.2.3. Lungimea de rugozitate, z_0 , în metri, pentru diverse categorii de teren ^{1), 2)} [2]

Categoria de teren	Descrierea terenului	z_0 , m	z_{min} , m
0	Mare sau zone costiere expuse vânturilor venind dinspre mare	0,003	1
I	Lacuri sau terenuri plate și orizontale cu vegetație neglijabilă și fără obstacole	0,01	1
II	Terenuri cu iarbă și/sau cu obstacole izolate (copaci, clădiri) aflate la distanțe de cel puțin de 20 de ori înălțimea obstacolului	0,05	2
III	Zone acoperite uniform cu vegetație, sau cu clădiri, sau cu obstacole izolate aflate la distanțe de cel mult de 20 de ori înălțimea obstacolului (de ex., sate, terenuri suburbane, păduri)	0,3	5
IV	Zone în care cel puțin 15% din suprafață este acoperită cu construcții având mai mult de 15 m înălțime.	1,0	10

¹⁾ Valorile mai mici ale lui z_0 conduc la valori mai mari ale vitezei medii a vântului

³⁾ Pentru aplicarea categoriilor de teren III și IV, terenurile respective trebuie să se dezvolte pe o distanță de cel puțin 500 m și respectiv 800 m în vecinătatea construcției.



(a)



(a)



(b)

Figura III.2.5 Categoria 0 - Mare sau zone costiere expuse vânturilor venind dinspre mare ($z_0 = 0,003$ m) [5]



(b)

Figura III.2.6 Categoria II - Terenuri cu iarbă și/sau cu obstacole izolate (copaci, clădiri) aflate la distanțe de cel puțin 20 de ori înălțimea obstacolului ($z_0 = 0,05$ m) [5]



(a)

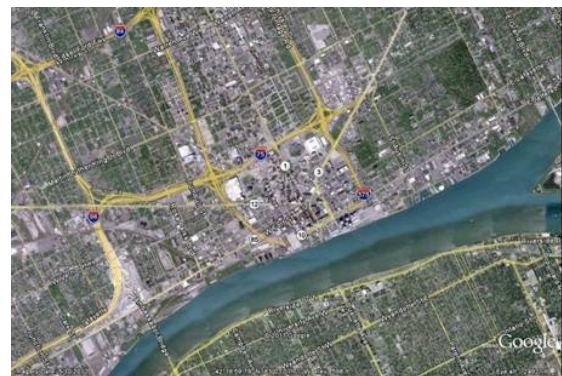


(a)



(b)

Figura III.2.7 Categoria III - Zone acoperite uniform cu vegetație, sau cu clădiri, sau cu obstacole izolate aflate la distanțe de cel mult de 20 de ori înălțimea obstacolului (de ex., sate, terenuri suburbane, păduri) ($z_0=0,3$ m) [5]



(b)

Figura III.2.8 Categoria IV - Zone în care cel puțin 15% din suprafață este acoperită cu construcții având mai mult de 15 m înălțime ($z_0 = 1,0$ m) [5]

Stratul limită atmosferic este zona, măsurată pe verticală de la suprafața terenului, în care curgerea aerului este afectată de frecarea cu terenul. Forța de frecare crește, viteza medie scade, iar turbulența crește la apropierea de suprafața terenului.

Stratul limită atmosferic este împărțit în două regiuni numite stratul limită interior și exterior. Stratul limită interior se află între suprafața terenului și o altitudine z_s de aproximativ 200 m; profilul vitezei medii în stratul limită interior este descris de o lege logaritmică în funcție de lungimea rugozitate, z_0 . Stratul limită exterior se întinde între cotele z_s și z_g ; viteza medie de la altitudinea z_s se racordează cu viteza de gradient V_g în conformitate cu un model foarte complex (în forma de spirală).

Profilul vertical al vitezei medii a vântului în amplasament este reprezentat printr-o funcție logaritmică determinată ce ține cont de rugozitatea terenului și de topografia acestuia. Se consideră cazul unui teren plat (câmp deschis, categoria de teren de referință) de rugozitate uniformă. Având viteza de referință v_b și lungimea de rugozitate de referință putem obține viteza de gradient V_g , ce este independentă de rugozitatea terenului. Cunoscând viteza de gradient V_g ne putem întoarce în stratul limită interior pentru a determina profilul vitezei medii asociate cu rugozitatea locală a terenului (Figura III.2.9).

În realitate, abordarea descrisă anterior este mai complicată datorită următoarelor aspecte. În primul rând rugozitatea terenului se schimbă într-un mod complex de la un amplasament la altul. În al doilea rând, terenul are o configurație topografică ce este, de multe ori, departe de cazul ideal al unei suprafețe plane.

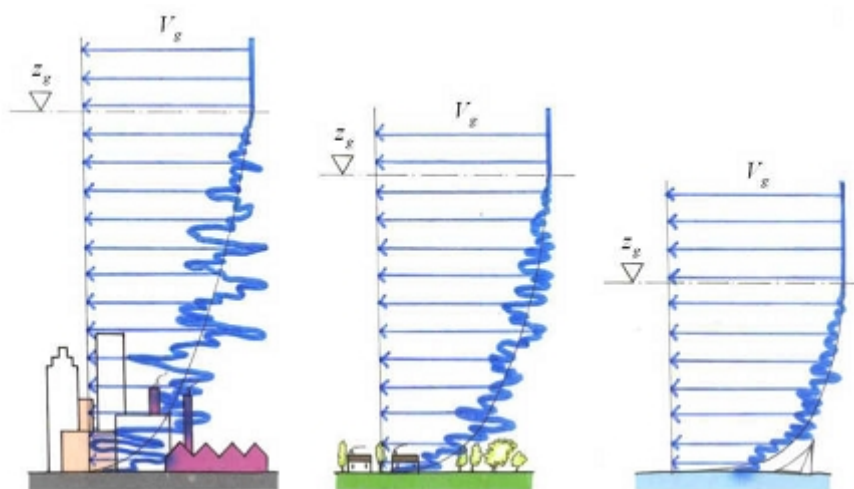


Figura III.2.9 Profilul vitezei medii a vântului în amplasamente cu rugozități diferite [1]

În ceea ce privește fluctuațiile vitezei, în ingineria vântului turbulența se modelează ca proces aleator staționar gaussian. Elementele esențiale pentru a reprezenta acest proces sunt date în secțiunea privind turbulența vântului.

Pe măsură ce ne apropiem de suprafața Pământului, forțele de frecare joacă un rol din ce în ce mai important în echilibrul forțelor ce se exercită asupra aerului în mișcare. În interiorul stratului limită atmosferic se constată că:

- viteza medie a vântului crește cu înălțimea;
- vântul este turbulent la orice cotă;
- fluctuațiile vitezei curentului de aer are o compoziție de frecvență de tip bandă lată;
- există o oarecare similaritate în tiparul rafalelor la toate cotele, în special pentru rafalele cu frecvențe joase.

Stratul limită atmosferic este zona, măsurată de la suprafața terenului, în care curgerea aerului este afectată de frecarea cu terenul. Forța de frecare crește și forța lui Coriolis scade pe măsură ce ne apropiem de teren. Aceste efecte perturbă echilibrul geostrofic și vectorul vitezei medii nu mai este paralel cu izobarele, ci se rotește către centrul de presiune joasă. Deci, vectorul vitezei medii a vântului își schimbă atât direcția cât și mărimea în funcție de înălțimea măsurată de la suprafața terenului. Deoarece schimbarea de direcție a vectorului viteză pe înălțimea construcțiilor este mică, acest efect se neglijează în calcul. De asemenea, se neglijează efectele produse de rotația Pământului și de vâscozitatea aerului.

Variația vitezei medii a vântului cu înălțimea deasupra terenului datorită rugozității suprafeței acestuia poate fi reprezentată de un profil logaritmic (adoptat de codul european EN 1991-1-4) sau de un profil exponențial (adoptat de codurile similare din SUA și Canada).

La înălțimi sub 200 m, în stratul limită interior, legea logaritmică modelează riguros variația vitezei medii a vântului cu înălțimea deasupra terenului. Pentru a obține legea logaritmică, în conformitate cu datele de observație se postulează că rata de modificare a vitezei medii a vântului, v_m în raport cu înălțimea, z depinde de următorii parametri:

- înălțimea deasupra terenului, z ;
- forța de reducere a vitezei masei de aer pe unitatea de suprafață produsă de frecarea cu terenul; această mărime este denumită tensiune de forfecare la suprafața terenului, τ_0 ;
- densitatea aerului, ρ_a .

Combinând rata de modificare a vitezei vântului cu parametrii anterior menționați, se poate defini o rată adimensională de modificare a vitezei vântului [3]:

$$\frac{dv_m}{dz} \cdot z \cdot \sqrt{\frac{\rho_a}{\tau_0}} \quad (III.2.13)$$

unde $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_a}}$ are dimensiuni de viteză și este denumită viteză de frecare.

Valoarea expresiei (III.2.13) este o constantă notată cu $\frac{1}{k}$ [3]:

$$\frac{dv_m}{dz} \cdot \frac{z}{u_*} = \frac{1}{k} \quad (III.2.14)$$

Din relația (III.2.14) se obține:

$$dv_m = \frac{u_*}{k} \cdot \frac{1}{z} dz \quad (\text{III.2.15})$$

Prin integrarea relației (III.2.15) se găsește expresia vitezei medii a vântului [3]:

$$v_m = \int_{z_0}^z \frac{u_*}{k} \cdot \frac{1}{z} dz = \frac{u_*}{k} \cdot \int_{z_0}^z \frac{1}{z} dz = \frac{u_*}{k} \cdot (\ln z - \ln z_0) = \frac{u_*}{k} \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (\text{III.2.16})$$

unde:

z_0 – constantă de integrare, având dimensiuni de lungime, cunoscută ca lungime de rugozitate; aceasta poate fi interpretată ca înălțimea deasupra terenului la care viteza medie a vântului este egală cu zero;

k – constanta lui von Karman, determinată experimental și egală cu 0,4.

O altă măsură a rugozității terenului este coeficientul de antrenare (de forță) a suprafeței, K , care este tensiunea adimensională de forfecare la suprafața terenului [3]:

$$K = \frac{\tau_0}{\rho \cdot v_{m,10}^2} = \frac{u_*^2 \cdot \rho_a}{\rho_a \cdot v_{m,10}^2} = \left(\frac{u_*}{v_{m,10}} \right)^2 \quad (\text{III.2.17})$$

Folosind relațiile (III.2.16) și (III.2.17) se obține următoarea formulă de calcul a coeficientului de antrenare al suprafeței, K [4]:

$$K = \frac{u_*^2}{v_{m,10}^2} = \left(\frac{u_*}{v_{m,10}} \right)^2 = \left[\frac{u_*}{\frac{u_*}{k} \cdot \ln\left(\frac{10}{z_0}\right)} \right]^2 = \left[\frac{k}{\ln\left(\frac{10}{z_0}\right)} \right]^2 = \left[\frac{1}{2,5 \cdot \ln\left(\frac{10}{z_0}\right)} \right]^2 \quad (\text{III.2.18})$$

Relația (III.2.16) este folosită pentru a exprima legătură între vitezele medii ale vântului la cotele z_1 și z_2 pe același amplasament:

$$\frac{v_m(z_1)}{v_m(z_2)} = \frac{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_2}{z_0}\right)} \quad (\text{III.2.19}).$$

Considerând două amplasamente cu lungimi de rugozitate diferite, z_{01} și z_{02} , raportul vitezelor medii ale vântului pe cele două amplasamente la cote diferite, z_1 și z_2 este

$$\frac{v_m(z_1)}{v_m(z_2)} = \frac{\frac{u_{*1}}{k} \ln\left(\frac{z_1}{z_{01}}\right)}{\frac{u_{*2}}{k} \ln\left(\frac{z_2}{z_{02}}\right)} = \left(\frac{z_{01}}{z_{02}} \right)^{0,07} \cdot \frac{\ln\left(\frac{z_1}{z_{01}}\right)}{\ln\left(\frac{z_2}{z_{02}}\right)} \quad (\text{III.2.20}).$$

unde se consideră aproximarea determinată experimental [3]:

$$\frac{u_{*1}}{u_{*2}} = \left(\frac{z_{01}}{z_{02}} \right)^{0,07} \quad (\text{III.2.21}).$$

Dacă în relația (III.2.20) amplasamentul 2 este înlocuit cu amplasamentul de referință – câmp deschis cu $z_{0ref} = 0,05\text{m}$ – și cota z_2 cu înălțimea de referință, $z_{ref} = 10\text{m}$ se obține

$$\frac{v_m(z)}{v_b} = \left(\frac{z_0}{z_{0ref}} \right)^{0,07} \cdot \frac{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_{ref}}{z_{0ref}}\right)} = \frac{\left(\frac{z_0}{z_{0ref}}\right)^{0,07}}{\ln\left(\frac{10}{0,05}\right)} \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) = k_r(z_0) \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (\text{III.2.22}).$$

unde factorul $k_r(z_0)$ este dat de relația:

$$k_r(z_0) = 0,189 \cdot \left(\frac{z_0}{0,05} \right)^{0,07} \quad (\text{III.2.23}).$$

Profilul vitezei medii a vântului mediată pe 10 minute pentru diferite categorii de teren în funcție de viteza de referință v_b se determină cu următoarea relație:

$$v_m(z) = k_r(z_0) \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \cdot v_b = c_r(z) \cdot v_b \quad (\text{III.2.24})$$

unde $c_r(z)$ este factorul de rugozitate pentru viteza vântului și se determină cu relația

$$c_r(z) = \begin{cases} \frac{v_m(z)}{v_b} = k_r(z_0) \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) & \text{pentru } z_{\min} < z \leq z_{\max} = 200 \text{ m} \\ c_r(z = z_{\min}) & \text{pentru } z \leq z_{\min} \end{cases} \quad (\text{III.2.25}).$$

Factorul de rugozitate pentru viteza vântului, $c_r(z)$ descrie variația vitezei medii a vântului cu înălțimea z deasupra terenului pentru diferite categorii de teren (caracterizate prin lungimea de rugozitate z_0) în funcție de viteza de referință a vântului. Variația factorului de rugozitate $c_r(z)$ cu înălțimea și categoria de teren este reprezentată în Figura III.2.10.

În cazul în care orografia terenului (dealuri izolate, creste) mărește viteza vântului cu mai mult de 5% față de valoarea calculată fără considerarea efectelor orografice (factorul orografic c_o are valori mai mari ca 1,05), viteza medie calculată cu relația (III.2.24) se înmulțește cu factorul orografic c_o (vezi rel. III.2.26). Valorile factorului orografic sunt date în codurile de proiectare (de ex.: SR EN 1991-1-4).

Efectele orografiei pot fi neglijate dacă panta medie a terenului din amonte (față de direcția de curgere a aerului) este mai mică de 3° . Terenul din amonte poate fi considerat până la o distanță egală cu de 10 ori înălțimea elementului orografic izolat.

În cazul în care efectele orografice nu pot fi neglijate, viteza medie a vântului, $v_m(z)$ la o înălțime z deasupra terenului se determină cu relația:

$$v_m(z) = c_o \cdot c_r(z) \cdot v_b \quad (\text{III.2.26})$$

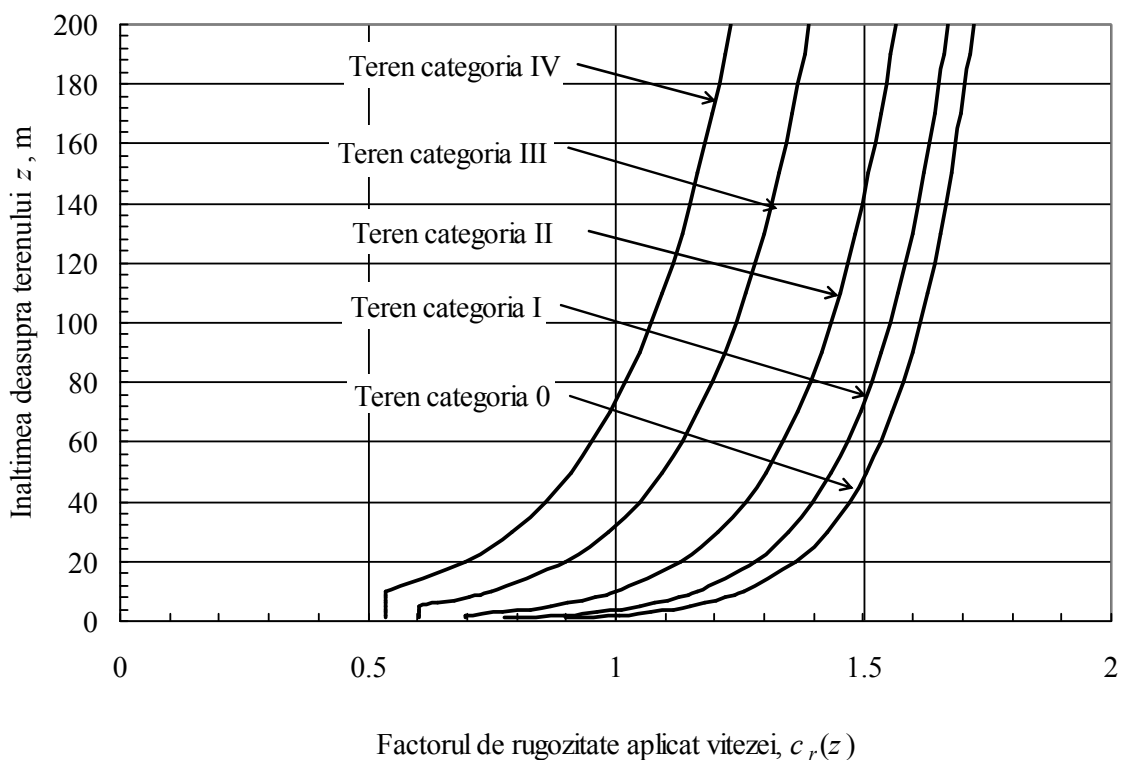


Figura III.2.10 Variația factorului de rugozitate $c_r(z)$

În cazul în care clădirea/structura analizată este/va fi amplasată în apropierea unei alte structuri care este de cel puțin două ori mai înaltă decât media înălțimilor structurilor învecinate, atunci aceasta poate fi expusă (în funcție de geometria structurii) unei viteze sporite a vitezei vântului pentru anumite direcții ale acestuia.

În evaluarea vitezei medii a vântului se poate lua în considerare și efectul clădirilor amplasate la distanțe reduse.

Profilul valorilor medii ale presiunii dinamice a vântului pentru diferite categorii de teren se obține în funcție de presiunea dinamică de referință, q_b cu următoarea relație:

$$q_m(z) = \left[k_r(z_0) \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \right]^2 \cdot q_b = [c_r(z)]^2 \cdot q_b \quad (\text{III.2.27})$$

unde $[c_r(z)]^2$ este factorul de rugozitate pentru presiunea dinamică a vântului și se determină cu relația

$$c_r^2(z) = \begin{cases} \frac{q_m(z)}{q_b} = k_r^2(z_0) \cdot \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \right]^2 & \text{pentru } z_{\min} < z \leq z_{\max} = 200 \text{ m} \\ c_r^2(z = z_{\min}) & \text{pentru } z \leq z_{\min} \end{cases} \quad (\text{III.2.28}).$$

Valorile $k_r(z_0)$ și $k_r^2(z_0)$ sunt indicate în Tabelul III.2.4.

Tabel III.2.4. Factorii $k_r(z_0)$ și $k_r^2(z_0)$ pentru diferite categorii de teren

Categoria de teren	0	I	II	III	IV
$k_r(z_0)$	0,155	0,169	0,189	0,214	0,233
$k_r^2(z_0)$	0,024	0,028	0,036	0,046	0,054

Factorul de rugozitate pentru presiunea dinamică a vântului, $c_r^2(z)$ descrie variația presiunii medii a vântului cu înălțimea z deasupra terenului pentru diferite categorii de teren (caracterizate prin lungimea de rugozitate z_0) în funcție de valoarea de referință a presiunii dinamice a vântului.

Variația factorului de rugozitate aplicat presiunii dinamice a vântului cu înălțimea și cu categoria de teren este prezentată în Figura III.2.11.

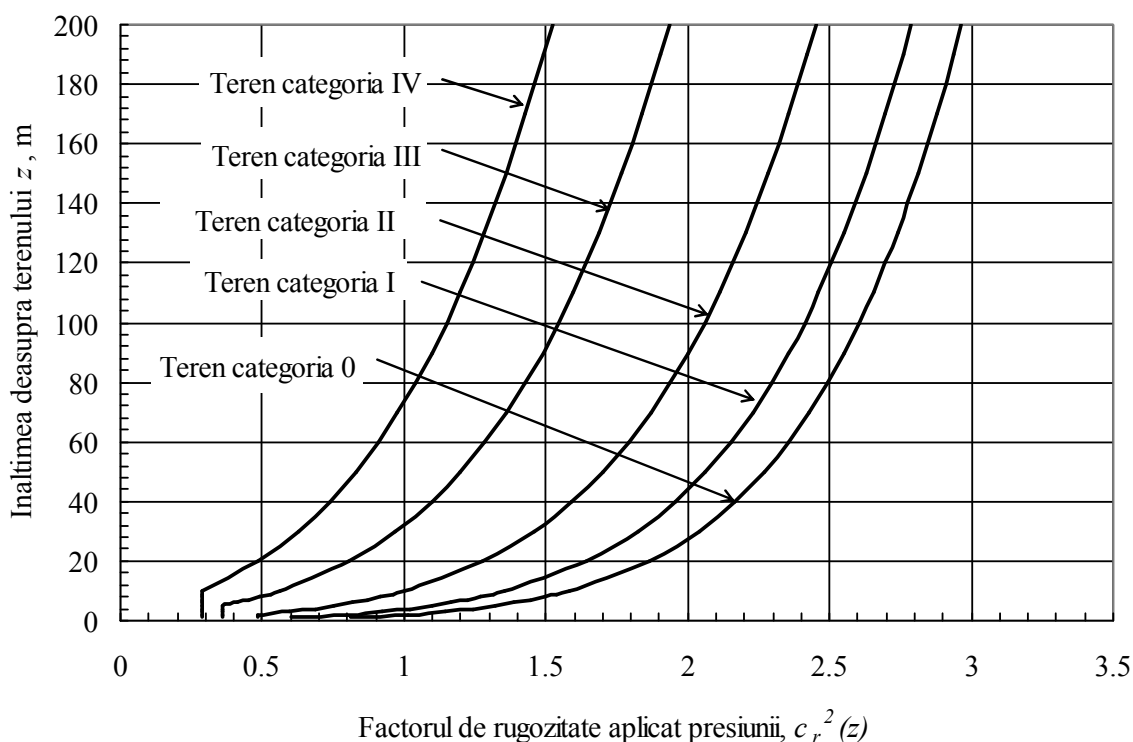


Figura III.2.11 Variația factorului de rugozitate, $c_r^2(z)$

În cazul în care efectele orografice nu pot fi neglijate, valoarea medie a presiunii dinamice a vântului, $q_m(z)$ la o înălțime z deasupra terenului se determină cu relația:

$$q_m(z) = c_o^2 \cdot c_r^2(z) \cdot q_b \quad (\text{III.2.29})$$

III.2.5. Turbulența vântului. Valori de vârf ale vitezei și presiunii dinamice a vântului

Viteza instantanee a vântului variază aleator în timp și spațiu datorită turbulenței spațiale a curgerii aerului. Variația aleatoare în timp și spațiu a vitezei vântului produce efecte dinamice asupra construcțiilor sensibile la acțiunea vântului.

Componenta în direcție longitudinală a vectorului vitezei vântului la cota z deasupra terenului se exprimă ca suma dintre un termen constant (viteza medie) și o funcție aleatoare de timp cu media zero (viteza fluctuantă):

$$V(z, t) = v_m(z) + v(z, t) \quad (\text{III.2.30}).$$

Primul termen reprezintă valoarea medie a vitezei în direcție longitudinală (în lungul vântului). Cel de al doilea termen reprezintă fluctuațiile vitezei instantanee față de medie (turbulența atmosferică) în direcție longitudinală. Turbulența atmosferică se modelează simplificat ca un proces aleator staționar, ergodic, normal și de medie zero.

Turbulența vitezei vântului poate fi caracterizată prin dispersia fluctuațiilor vitezei față de valoarea sa medie, sau prin valoarea medie pătratică a fluctuațiilor. Deoarece fluctuațiile vitezei față de medie sunt reprezentate printr-un proces aleator de medie zero, valoarea medie pătratică a fluctuațiilor este egală cu dispersia acestora:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [V(t) - v_m]^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [v(t)]^2 dt = \overline{v^2} \quad (\text{III.2.31}).$$

În partea inferioară a stratului limită atmosferic (stratul limită interior - max. 200 m de la suprafața terenului) se poate considera, simplificat, că dispersia rafalelor longitudinale ale vântului este independentă de înălțimea z deasupra terenului și proporțională cu pătratul vitezei de frecare, u_*^2 [3]:

$$\sigma_v^2 = \beta \cdot u_*^2 \quad (\text{III.2.32}).$$

Factorul de proportionalitate β depinde de rugozitatea terenului din amplasament. Datele experimentale arată că valoarea β în direcție longitudinală poate fi determinată cu următoarea relație [4]:

$$4,5 \leq \beta = 4,5 - 0,856 \cdot \ln(z_0) \leq 7,5 \quad (\text{III.2.33})$$

unde z_0 este lungimea de rugozitate, exprimată în metri.

Raportul între abaterea standard a fluctuațiilor rafalelor vântului pe direcție longitudinală și viteza medie a vântului este denumit intensitatea turbulenței longitudinale și are semnificația coeficientului de variație al fluctuațiilor rafalelor față de viteza medie:

$$I_v(z) = \frac{\sigma_v}{v_m(z)} = \frac{\sqrt{\beta} \cdot u_*}{\frac{1}{k} \cdot u_* \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} = \frac{\sqrt{\beta}}{2,5 \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \quad (\text{III.2.34})$$

Intensitatea turbulenței la înălțimea z se determină cu relația:

$$I_v(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\beta}}{2,5 \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} & \text{pentru } z_{\min} < z \leq z_{\max} = 200 \text{ m} \\ I_v(z = z_{\min}) & \text{pentru } z \leq z_{\min} \end{cases} \quad (\text{III.2.35}).$$

Variația intensității turbulenței cu înălțimea deasupra terenului pentru diferite rugozități (categorii de teren) este reprezentată în Figura III.2.12.

Pentru teren de categoria II intensitatea turbulenței $I_v(z)$ poate fi aproximată de relația [2]:

$$I_v(z) = \begin{cases} \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} & \text{pentru } z_{\min} < z \leq z_{\max} = 200 \text{ m} \\ I_v(z = z_{\min}) & \text{pentru } z \leq z_{\min} \end{cases} \quad (\text{III.2.36})$$

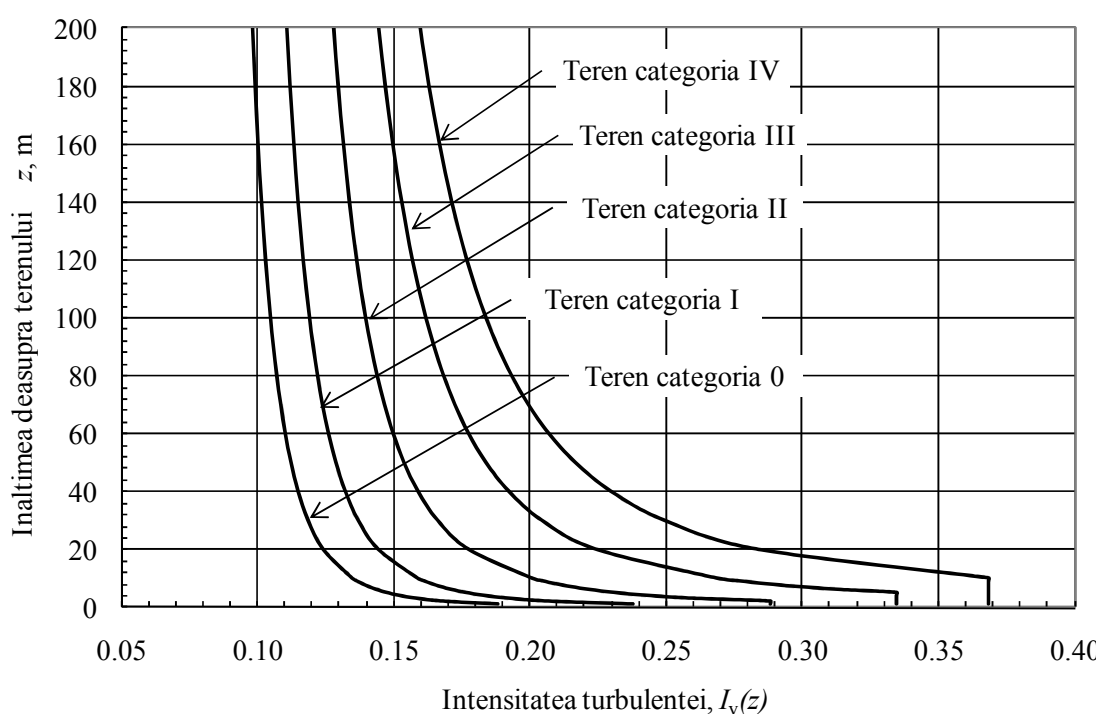


Figura III.2.12 Intensitatea turbulenței, $I_v(z)$

În codurile de proiectare se folosesc valori de vârf sau „extreme maxime” ale vitezei și presiunii de rafală a vântului. Datorită caracterului aleator al vitezei instantanee a vântului, valoarea de vârf a vitezei de rafală a vântului într-un interval de timp de 10 minute este o variabilă aleatoare pentru care se definește o valoare medie (așteptată), Figura III.2.13. Considerând că valorile vitezei longitudinale a vântului au o repartiție normală, valoarea așteptată a vitezei de rafală este [1]:

$$v_p(z) = v_m(z) + g \cdot \sigma_v = v_m(z)[1 + g \cdot I_v(z)] \quad (\text{III.2.37})$$

unde g este un factor de vârf a cărui valoare medie estimată este 3,5.

Factorul de rafală pentru viteza vântului, $c_{pv}(z)$ la o înălțime z deasupra terenului se definește ca raportul dintre valoarea de vârf a vitezei vântului (produsă de rafalele vântului turbulent) și valoarea medie (mediată pe 10 min în cod) a vitezei vântului, ambele la înălțimea z :

$$c_{pv}(z) = \frac{v_p(z)}{v_m(z)} = 1 + g \cdot I_v(z) = 1 + 3,5 \cdot I_v(z) \quad (\text{III.2.38})$$

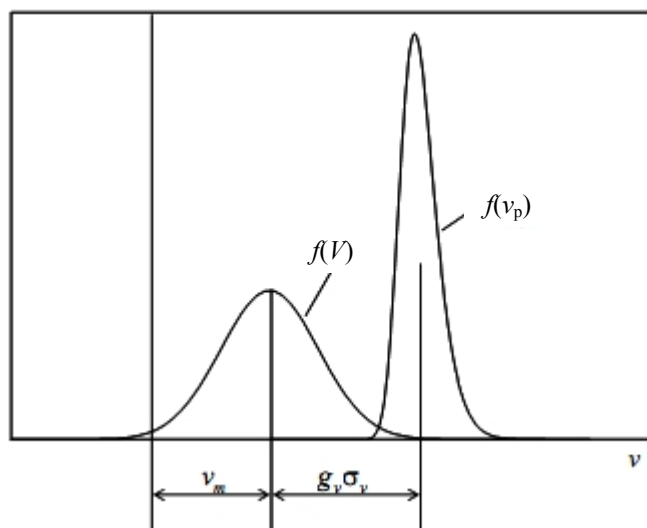


Figura III.2.13 Densitatea de repartitie a vitezei vântului și a valorilor sale maxime [1]

Variația factorului de rafală $c_{pv}(z)$, considerând $g = 3,5$, este reprezentată în Figura III.2.14.

Valorile factorului de rafală aplicat vitezei medii a vântului depind de durata de mediere a vitezei de referință a vântului și, de exemplu [4]:

$$c_{pv}^{1 \text{ min}} \cong 0,84 \cdot c_{pv}^{10 \text{ min}} \quad (\text{III.2.39})$$

$$c_{pv}^{1 \text{ h}} \cong 1,05 \cdot c_{pv}^{10 \text{ min}} \quad (\text{III.2.40}).$$

Valoarea de vârf sau „maximă” a presiunii dinamice a vântului într-un interval de timp egal cu 10 min. este

$$q_p(z) = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot [v_m(z)]^2 \cdot [1 + g \cdot I_v(z)]^2 \cong q_m(z) \cdot [1 + 7 \cdot I_v(z)] \quad (\text{III.2.41})$$

unde ρ_a este densitatea aerului. În relația (III.2.41) s-a neglijat termenul de ordinul 2 al intensității turbulenței, având în vedere că eroarea introdusă de această aproximare este sub 3-4%.

Factorul de rafală pentru presiunea dinamică a vântului, $c_{pq}(z)$ la înălțimea z deasupra terenului se definește ca raportul dintre valoarea de vârf a presiunii dinamice a vântului

(produsă de rafalele vântului) și valoarea medie a presiunii dinamice a vântului (produsă de viteza medie a vântului), ambele la înălțimea z :

$$c_{pq}(z) = \frac{q_p(z)}{q_m(z)} = 1 + 2g \cdot I_v(z) = 1 + 7 \cdot I_v(z) \quad (\text{III.2.42}).$$

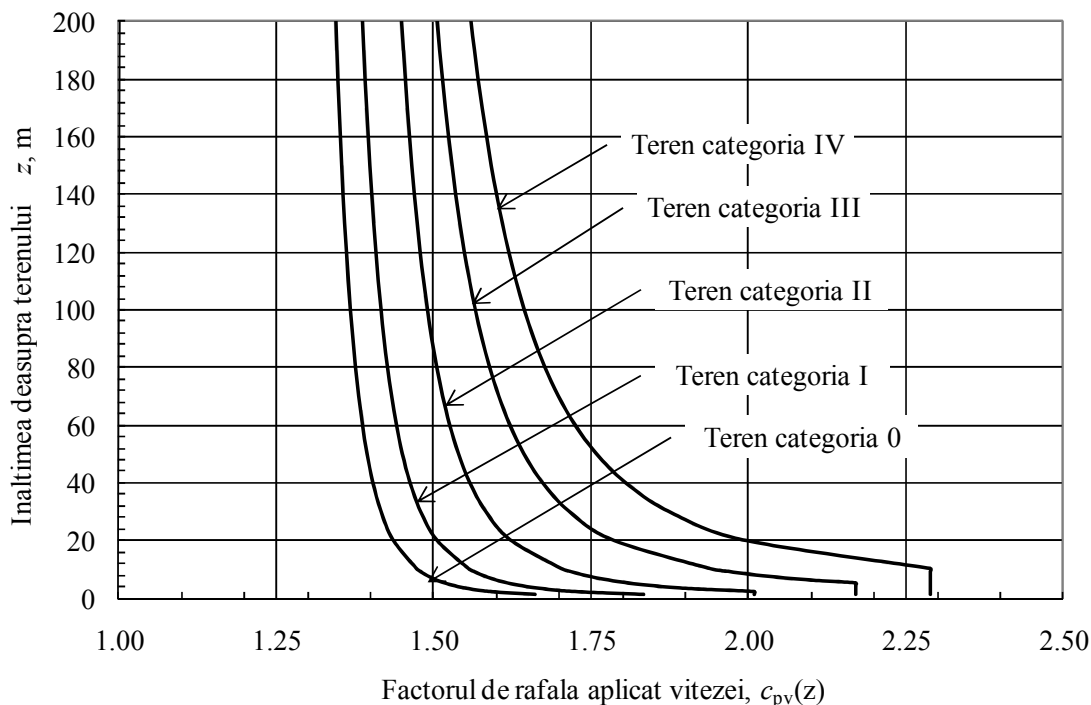


Figura III.2.14 Factorul de rafală pentru viteza vântului, $c_{pv}(z)$

Variația factorului de rafală pentru presiunea dinamică a vântului, considerând $g = 3,5$, este reprezentată în Figura III.2.15.

Valorile numerice ale factorului de rafală pentru presiunea dinamică a vântului depind de durata de mediere a vitezei de referință a vântului [4]:

$$c_{pq}^{1\min} \cong 0,70 \cdot c_{pq}^{10\min} \quad (\text{III.2.43})$$

$$c_{pq}^{1h} \cong 1,1 \cdot c_{pq}^{10\min} \quad (\text{III.2.44}).$$

În final, relația de calcul a valorii de vârf a presiunii dinamice a vântului este:

$$\begin{aligned} q_p(z) &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot [v_m(z)]^2 \cdot [1 + 7 \cdot I_v(z)] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_b)^2 \cdot k_r^2(z_0) \cdot \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \right]^2 \cdot [1 + 7 \cdot I_v(z)] = c_e(z) \cdot q_b \end{aligned} \quad (\text{III.2.45}).$$

Factorul de expunere, $c_e(z)$ este determinat cu relația:

$$c_e(z) = k_r^2(z_0) \cdot \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \right]^2 \cdot [1 + 7 \cdot I_u(z)] \quad (\text{III.2.46})$$

Variatia factorului de expunere este reprezentată, pentru diferite categorii de teren, în Figura III.2.16.

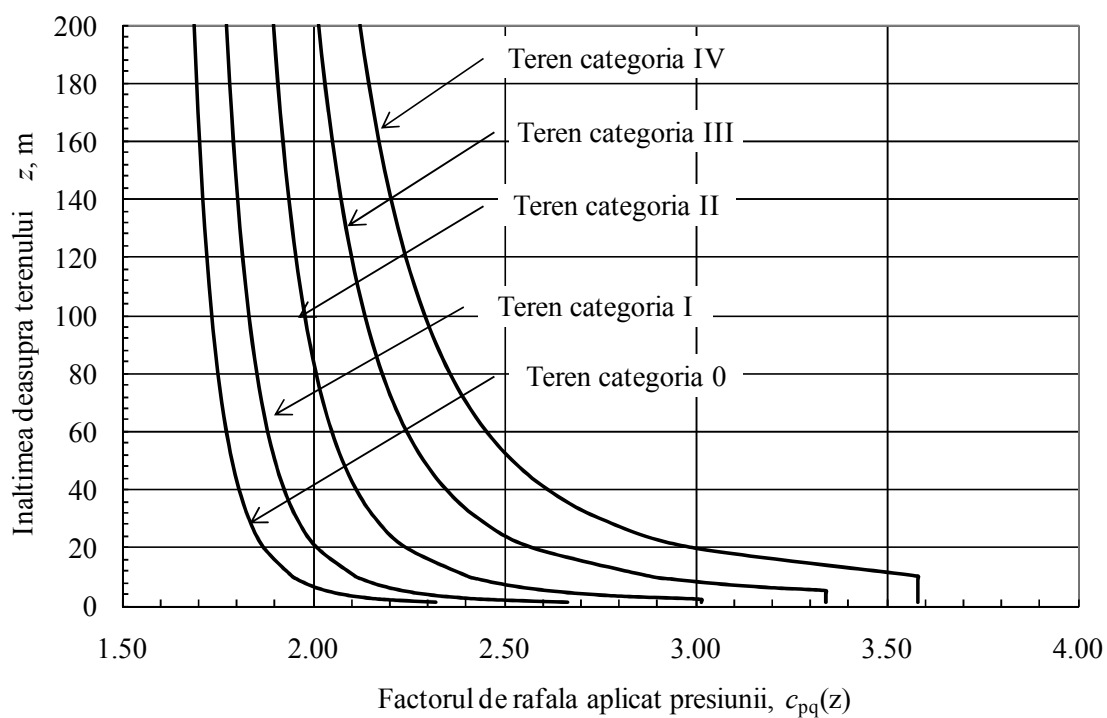


Figura III.2.15 Factorul de rafală pentru presiunea dinamică a vântului, $c_{pq}(z)$

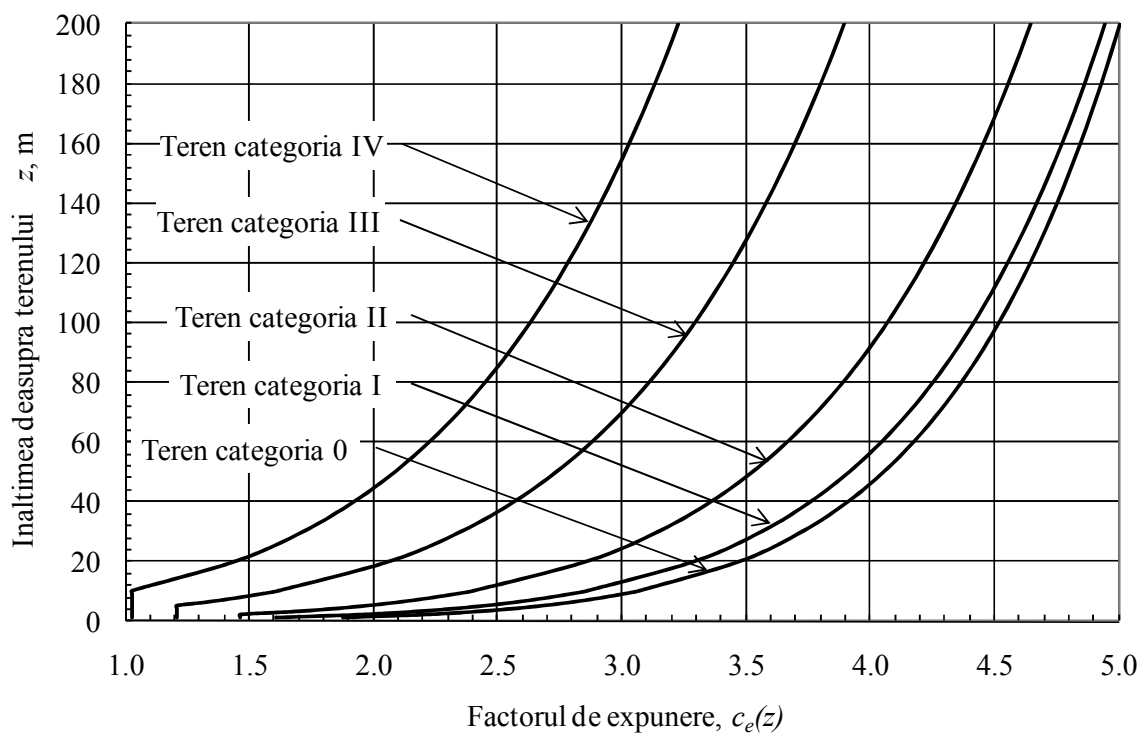


Figura III.2.16 Factorul de expunere, $c_e(z)$

În cazul în care efectele orografice nu pot fi neglijate, factorul de expunere, $c_e(z)$ se completează cu factorul c_0^2 (vezi relația III.2.29) astfel:

$$c_e(z) = c_0^2 \cdot c_r^2(z) \cdot c_{pq}(z) \quad (\text{III.2.47}).$$

Bibliografie

1. CNR-DT 207/2008 - Istruzioni per la valutazione delle azioni e degli effetti del vento sulle costruzioni, CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE, 2008
2. EN 1991-1-4 - Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind actions, CEN
3. J. D. Holmes, 2004 - Wind Loading of Structures, Taylor & Francis
4. NP 082-04 - Cod de proiectare. Bazele proiectării și acțiuni asupra construcțiilor. Acțiunea vântului, MTCT, 2005
5. <http://maps.google.com/>
6. Lungu D., Demetriu S., Aldea A., 1994. *Basic code parameters for environmental actions in Romania harmonised with EUROCODE 1*, Scientific Bulletin of Technical University of Civil Engineering Bucharest, Vol.2/1994, p.35-44
7. Lungu D., van Gelder P., Trandafir R., 1996. *Comparative study of Eurocode 1, ISO and ASCE procedures for calculating wind loads*. IABSE Colloquium, Basis of Design and Actions on Structures, Background and Application of EUROCODE 1. Delft University of Technology, March 27-29, p.345-354
8. Lungu, D., Aldea, A., Demetriu, S., 1998. *Probabilistic wind and snow hazards assessment for Romania*, Proceedings of the 1st International Scientific-Technical Conference – Technical Meteorology of the Carpathians, Ukraine, p.35-40
9. D. Ghiocel, D. Lungu, 1975. *Wind, snow and temperature effects on structures, based on probability*, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, U.K.
10. D. Lungu, R. Văcăreanu, A. Aldea, C. Arion, 2000. *Advanced Structural Analysis*, Editura CONSPRESS, 177 p., ISBN 973-8165-15-6
11. NP 082-04, 2005. *Cod de proiectare. Bazele proiectării și acțiuni asupra construcțiilor. Acțiunea vântului*, MTCT

III.3. Acțiunea vântului asupra clădirilor și structurilor

III.3.1. Elemente generale

Vântul exercită pe construcția în ansamblu și pe elementele acesteia acțiuni aerodinamice produse de fluxul incident și de trenul de vârtejuri turbulente generate de către construcție. Acțiunea aerodinamică variază aleator în timp și spațiu și produce, în general, efecte dinamice în răspunsul construcțiilor. În cazul construcțiilor care au o flexibilitate pronunțată, oscilațiile acestora modifică fluxul incident și acțiunea aerodinamică, producând fenomene de interacțiune vânt-structură, numite fenomene aeroelastice.

Cele mai multe dintre construcții și componentele acestora au o rigiditate și o amortizare suficient de mari pentru a limita efectele dinamice și pentru a exclude fenomenele aeroelastice periculoase. În aceste cazuri, acțiunea vântului poate fi reprezentată printr-o distribuție echivalentă de presiuni sau de forțe care, aplicate static pe construcție sau pe componentele sale, produc valorile maxime ale deplasărilor și eforturilor secționale cauzate de acțiunea dinamică a vântului.

Acțiunile din vânt pe construcțiile cu răspuns dinamic pe direcția vântului sunt reprezentate simplificat printr-un set de presiuni sau forțe static echivalente care se obțin prin înmulțirea valorilor de vârf ale presiunilor sau forțelor ce acționează pe construcție cu coeficientul de răspuns dinamic.

Acțiunea vântului este reprezentată de presiunile produse de vânt pe suprafețele clădirilor și structurilor, sau de forțele produse de vânt pe clădiri și structuri. Acțiunile din vânt sunt acțiuni variabile în timp și acționează atât direct, ca presiuni pe suprafețele exterioare ale clădirilor și structurilor închise cât și indirect pe suprafețele interioare ale clădirilor și structurilor închise, din cauza porozității suprafețelor exterioare. Presiunile pot acționa direct și pe suprafețele interioare ale clădirilor și structurilor deschise. Presiunile acționează pe suprafața construcțiilor rezultând forțe normale pe suprafețele acestora. În plus, atunci când suprafețe mari ale construcțiilor sunt expuse vântului, forțele de frecare orizontale ce acționează tangențial la suprafețe pot avea efecte semnificative.

Acțiunea vântului asupra clădirilor și structurilor poate fi reprezentată de:

- a. presiunile exercitate de vânt pe fiecare față a suprafețelor construcției sau a elementelor sale (de exemplu, în cazul clădirilor);
- b. presiunile totale (nete) exercitate de vânt pe ambele suprafețe ale construcției sau a elementelor acesteia; acestea sunt date de suma presiunilor care acționează pe ambele fețe ale suprafețelor fiind utilizate, de exemplu, în cazul pereților izolați și a parapetilor;
- c. forțele și momentele rezultante din acțiunea vântului exercitate pe clădiri în ansamblu sau pe elemente (copertine, panouri);

- d. forțele și momentele pe unitatea de lungime exercitate de vânt de-a lungul axei construcției sau a elementelor zvelte (de exemplu, cosuri de fum, turnuri și poduri);
- e. forțele tangențiale exercitate de către vânt pe suprafețele paralele cu direcția vântului (în cazul clădirilor sau a unor elemente cu suprafețe expuse mari, cum ar fi clădiri industriale mari și pereti sau parapeti lungi).

Acțiunea aerodinamică de varf, pe construcția în ansamblul ei sau pe elementele sale individuale, este valoarea maximă așteptată a acțiunii vântului pe un interval $T=10$ minute, evaluată cu neglijarea:

- efectelor de reducere a răspunsului structural datorate nesimultaneității valorilor de vârf ale presiunilor locale, și a
- efectelor de amplificare a răspunsului structural produse de vibrațiile structurale în cvasi-rezonanță cu conținutul de frecvențe al rafalelor vântului.

Acțiunea statică echivalentă a vântului se definește ca fiind acțiunea care, aplicată static pe clădire / structură sau pe elementele sale, produce valorile maxime așteptate ale deplasărilor și eforturilor secționale induse de acțiunea reală a vântului. În general, acțiunea statică echivalentă este exprimată printr-o relație de tipul:

$$\text{Acțiunea statică echivalentă} = c_d \times \text{Acțiunea aerodinamică de vârf} \quad (\text{III.3.1})$$

unde c_d este un parametru adimensional numit coeficient de răspuns dinamic.

Acțiunea statică echivalentă, pe o construcție, în ansamblu (sau pe elementele sale individuale), este valoarea maximă așteptată a acțiunii vântului pe $T=10$ minute evaluată cu considerarea:

- efectele de reducere a răspunsului structural datorate nesimultaneității valorilor de vârf ale presiunilor locale pe suprafața construcției;
- efectele de amplificare a răspunsului structural produse de vibrațiile structurii în cvasi-rezonanță cu conținutul de frecvențe a rafalelor vântului.

Acțiunea statică echivalentă este produsul a trei mărimi caracteristice, respectiv viteza vântului în amplasamentul construcției, aerodinamica corpului și dinamica structurii, exprimate prin: valoarea de vârf a presiunii dinamice la o cotă de referință, coeficientul aerodinamic și coeficientul de răspuns dinamic.

III.3.2. Presiunea vântului pe suprafețe

Ipoteza “cvasi-staționară” se află la baza codurilor și standardelor pentru determinarea acțiunii vântului pe construcții. Conform ipotezei cvasi-staționare, fluctuațiile presiunii pe suprafețele

construcțiilor, $W(t)$ urmăresc fluctuațiile vitezei longitudinale a vântului în amonte de construcții [3]:

$$W(t) = w_m + w(t) = c_{p0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2(t) \quad (\text{III.3.2})$$

unde c_{p0} este coeficientul cvasi-stationar de presiune.

Dacă se dezvoltă $V(t)$ în componenta medie și componenta fluctuantă, se obține:

$$W(t) = c_{p0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot [v_m + v(t)]^2 = c_{p0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot [v_m^2 + v^2(t) + 2 \cdot v_m \cdot v(t)] \quad (\text{III.3.3}).$$

Componenta medie a presiunii este:

$$w_m = c_{p0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_m^2 + \sigma_v^2) \quad (\text{III.3.4}).$$

Pentru intensități reduse ale turbulenței, dispersia σ_v^2 este mică în comparație cu pătratul valorii medii, v_m^2 . În acest caz, coeficientul cvasi-staționar de presiune, c_{p0} se poate considera aproximativ egal cu coeficientul mediu de presiune, c_{pm} :

$$w_m = c_{p0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_m^2 = c_{pm} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_m^2 \quad (\text{III.3.5}).$$

Scăzând valorile medii din ambii termeni ai relației (III.3.3) se obține:

$$w(t) = c_{p0} \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \rho \cdot (2 \cdot v_m \cdot v(t) + v^2(t)) \quad (\text{III.3.6}).$$

Neglijând cel de al doilea termen în paranteză din relația (III.3.6) (considerând că turbulența este redusă), ridicând la pătrat și luând valorile medii, se obține valoarea medie pătratică a presiunii fluctuante [3]:

$$\overline{w^2} = \overline{c_p^2} \cdot \rho^2 \cdot v_m^2 \cdot \overline{v^2} \quad (\text{III.3.7}).$$

Ecuția (III.3.7) furnizează relația cvasi-staționară între valoarea medie pătratică a fluctuațiilor presiunii și valoarea medie pătratică a fluctuațiilor vitezei în direcție longitudinală.

Folosind ipoteza cvasi-staționară, valoarea de vârf a presiunii vântului pe suprafețe, w_p este [3]:

$$w_p = c_{p0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_p^2 \cong c_{pm} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_p^2 = c_{pm} \cdot q_p \quad (\text{III.3.8})$$

unde v_p este valoarea de vârf a vitezei vântului și q_p este valoarea de vârf a presiunii dinamice a vântului.

În ipoteza cvasi-staționară, se pot determina valori de vârf ale presiunii pe suprafețele construcțiilor folosind valori medii ale coeficienților de presiune cu valori de vârf ale presiunii dinamice a vântului.

Acțiunea vântului pe suprafața unei construcții sau a unui element component produce presiuni și sucțiuni w orientate normal, atât pe suprafețele exterioare cât și pe cele interioare. Presiunile sunt considerate, convențional, pozitive; sucțiunile sunt considerate, convențional, negative. Presiunile ce acționează pe fețele exterioare ale clădirii se consideră presiuni externe, w_e ; presiunile ce acționează pe fețele interioare ale clădirii se consideră presiuni interne, w_i .

Presiunea vântului ce acționează pe suprafețele rigide exterioare ale clădirii / structurii se determină cu relația [2]:

$$w_e = \gamma_{Iw} \cdot c_{pe} \cdot q_p(z_e) \quad (\text{III.3.9})$$

unde:

$q_p(z_e)$ este valoarea de vârf a presiunii dinamice a vântului evaluată la cota z_e ;

z_e este înălțimea de referință pentru presiunea exterioară;

c_{pe} este coeficientul aerodinamic de presiune pentru suprafețe exterioare;

γ_{Iw} este factorul de importanță – expunere.

Presiunea vântului ce acționează pe suprafețele rigide interioare ale clădirii / structurii se determină cu relația [2]:

$$w_i = \gamma_{Iw} \cdot c_{pi} \cdot q_p(z_i) \quad (\text{III.3.10})$$

unde:

$q_p(z_i)$ este valoarea de vârf a presiunii dinamice a vântului evaluată la cota z_i ;

z_i este înălțimea de referință pentru presiunea interioară;

c_{pi} este coeficientul aerodinamic de presiune pentru suprafețe interioare;

γ_{Iw} este factorul de importanță – expunere.

Presiunea totală a vântului pe un element de construcție este diferența dintre presiunile (orientate către suprafață) și sucțiunile (orientate dinspre suprafață) pe cele două fețe ale elementului; presiunile și sucțiunile se iau cu semnul lor. Presiunile sunt considerate cu semnul (+) iar sucțiunile cu semnul (-), Figura III.3.1.

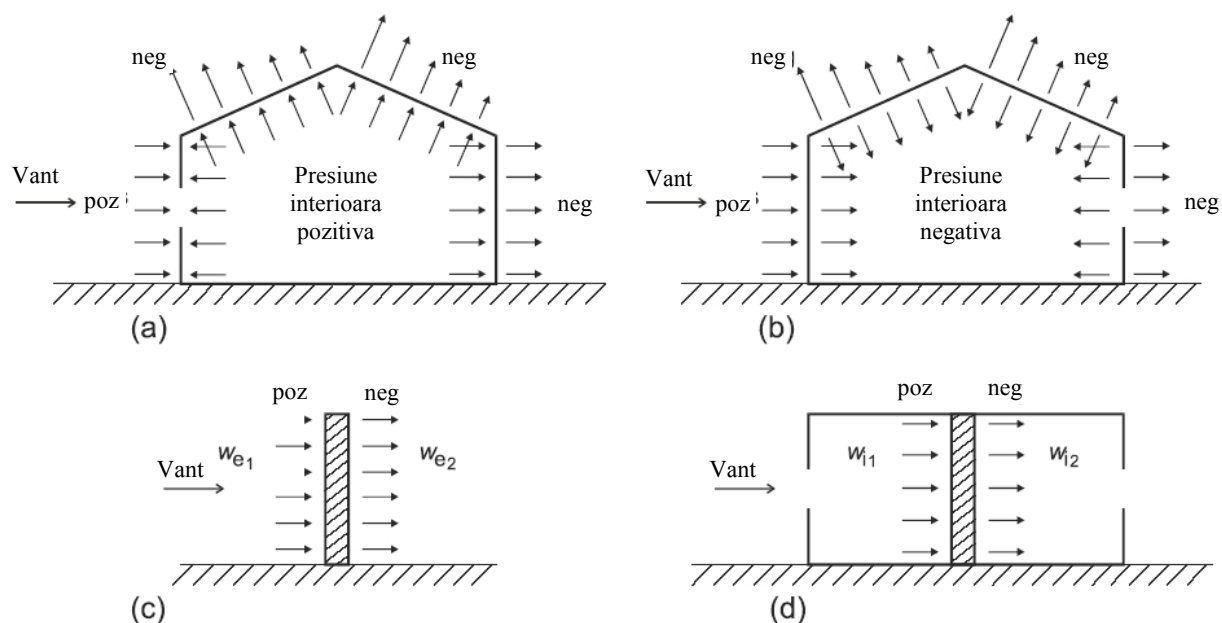


Figura III.3.1 Presiuni pe suprafețe [2]

Actiunea produsă de vânt pe ambele fete ale suprafețelor unei construcții sau a elementelor sale poate fi exprimată ca presiunea totală, sau netă, aplicată normal pe suprafață.

III.3.3. Forțe din vânt

Actiunile exercitate de vânt pe clădiri și structuri pot fi exprimate printr-un sistem de trei forțe globale ortogonale F_X , F_Y , F_Z , și trei momente globale ortogonale M_X , M_Y , M_Z aplicate într-un punct de referință al clădirii sau structurii, așa cum se arată în Figura III.3.2.

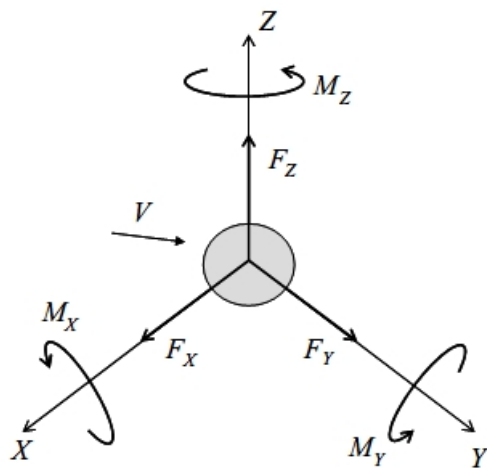


Figura III.3.2. Actiuni rezultante pe clădiri și structuri [1]

Acțiunea exercitată de vânt asupra construcțiilor pe direcție longitudinală (în lungul vântului) se exprimă printr-o forță globală F_w aplicată într-un punct de referință al construcției.

Forțele globale exercitate de vânt asupra construcțiilor sunt evaluate, de regulă, pentru fiecare din axele principale ale construcției, considerate separat. În unele cazuri, cum ar fi de exemplu turnurile cu secțiunea cvasi-pătrată, trebuie considerată și posibilitatea de acțiune a vântului în direcție diagonală (Figura III.3.3). În general, se recomandă determinarea direcției vântului ce produce acțiunile aerodinamice și efectele structurale cele mai severe asupra construcției.

Forțele locale exercitate de vânt pe elemente structurale și/sau nestructurale sunt evaluate considerând direcția vântului care provoacă acțiunea cea mai severă.

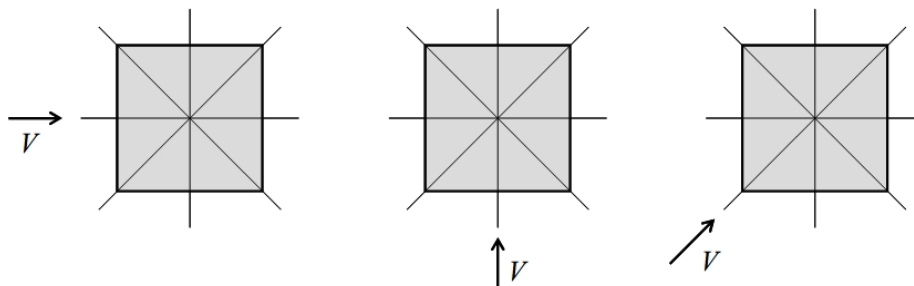


Figura III.3.3 Direcția vântului de proiectare pentru structuri pătrate în plan [1]

Forțele aerodinamice sunt reprezentate, în mod convențional, prin componentele în două direcții ortogonale. Acestea pot fi direcția paralelă și cea perpendiculară pe direcția vântului – caz în care axele sunt numite axele vântului –, sau direcția paralelă și cea perpendiculară în raport cu geometria corpului – caz în care sunt numite axele corpului. Aceste axe sunt arătate în Figura III.3.4. Urmând terminologia din aeronautică, în ingineria vântului sunt folosiți termenii de portanță (“lift”) și antrenare (“drag”) pentru componentele orizontale ale forței în direcție perpendiculară pe vânt și în direcția vântului.

Relația între forțe și coeficienții de forță în raport cu cele două axe se poate obține pe baze trigonometrice, folosind unghiul α între seturile de axe (Figura III.3.5). Unghiul α este numit unghi de atac sau unghi de incidență.

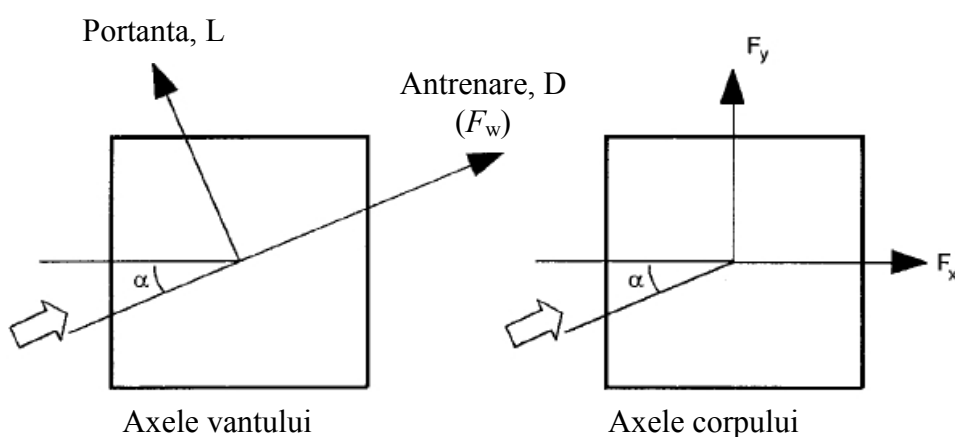


Figura III.3.4 Axele vântului și axele corpului [1]

Forța rezultantă

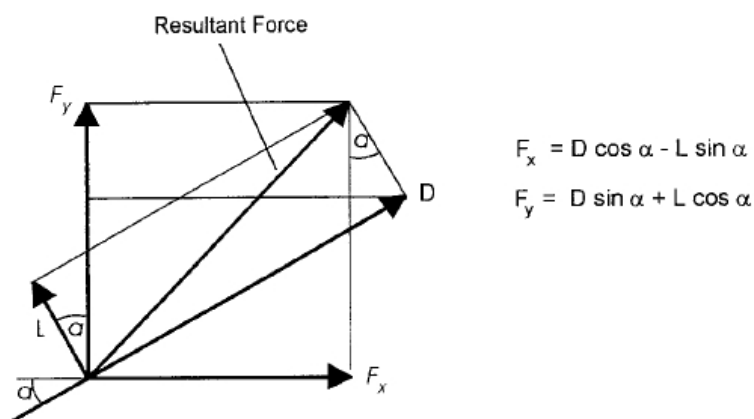


Figura III.3.5 Relații între forțe [1]

Forța din vânt acționând asupra unei clădiri / structuri sau asupra unui element structural poate fi determinată în două moduri:

- i. ca forță globală utilizând coeficienții aerodinamici de forță, sau
- ii. prin sumarea presiunilor acționând pe suprafețele (rigide) ale clădirii / structurii utilizând coeficienții aerodinamici de presiune.

Forța globală pe direcția vântului F_w , ce acționează pe structură sau pe un element structural având aria de referință A_{ref} orientată perpendicular pe direcția vântului, se determină cu relația generală [2]:

$$F_w = \gamma_{lw} \cdot c_d \cdot c_f \cdot q_p(z_e) \cdot A_{ref} \quad (III.3.11)$$

sau prin compunerea vectorială a forțelor pentru elementele structurale individuale cu relația [2]:

$$F_w = \gamma_{lw} \cdot c_d \cdot \sum_{elemente} c_f \cdot q_p(z_e) \cdot A_{ref} \quad (III.3.12).$$

În relațiile (III.3.11) și (III.3.12):

$q_p(z_e)$ este valoarea de vârf a presiunii dinamice a vântului evaluată la cota z_e ;

c_d este coeficientul de răspuns dinamic al construcției;

c_f este coeficientul aerodinamic de forță pentru clădire / structură sau element structural, ce include și efectele frecării;

A_{ref} este aria de referință, orientată perpendicular pe direcția vântului, pentru clădiri / structuri (rel. (III.3.11)) sau elemente sale (rel. (III.3.12)).

Forța globală pe direcția vântului, F_w ce acționează pe clădire / structură sau pe un element structural poate fi determinată prin compunerea vectorială a forțelor $F_{w,e}$, $F_{w,i}$, calculate pe baza presiunilor exterioare și interioare cu relațiile (III.3.13) și (III.3.14) [2]

- forțe provenind din presiunile ce se exercită pe suprafețe exterioare

$$F_{w,e} = c_d \cdot \sum_{suprafete} w_e(z_e) \cdot A_{ref} \quad (III.3.13)$$

- forțe provenind din presiunile ce se exercită pe suprafețe interioare

$$F_{w,i} = \sum_{\text{suprafete}} w_i(z_i) \cdot A_{ref} \quad (\text{III.3.14})$$

cu forțele de frecare, F_{fr} rezultate din frecarea vântului paralel cu suprafețele exterioare, calculate cu relația (III.3.15):

$$F_{fr} = \gamma_{lw} \cdot c_{fr} \cdot q_p(z_e) \cdot A_{fr} \quad (\text{III.3.15}).$$

În relațiile (III.3.13), (III.3.14) și (III.3.15):

c_d este coeficientul de răspuns dinamic al construcției;

$w_e(z_e)$ este presiunea vântului ce acționează pe o suprafață exterioară individuală la înălțimea z_e ;

$w_i(z_i)$ este presiunea vântului ce acționează pe o suprafață interioară individuală la înălțimea z_i ;

A_{ref} este aria de referință a suprafeței individuale;

c_{fr} este coeficientul de frecare;

A_{fr} este aria suprafeței exterioare orientată paralel cu direcția vântului.

Efectele generate de frecarea vântului pe suprafețe pot fi neglijate atunci când aria totală a suprafețelor paralele cu direcția vântului (sau puțin înclinate față de aceasta) reprezintă mai puțin de $\frac{1}{4}$ din aria totală a tuturor suprafețelor exterioare perpendiculare pe direcția vântului. Efectele generate de frecarea vântului pe suprafețe nu vor fi neglijate pentru starea limită de echilibru static, *EQU*.

Dacă fluctuațiile instantanee ale vântului pe suprafețele rigide ale unei construcții pot produce încărcări cu asimetrie importantă și forma construcției este sensibilă la asemenea încărcări (de exemplu pentru clădiri simetrice cu un singur nucleu central supuse la torsiune), atunci efectul acestora trebuie luat în considerare. Pentru construcții dreptunghiulare sensibile la torsiune se va folosi distribuția presiunii dată în Figura III.3.6 în vederea reprezentării efectelor de torsiune produse de un vânt incident ne-perpendicular sau produse de lipsa de corelație între valorile de vârf ale forțelor din vânt ce acționează în diferite puncte ale construcției [2].

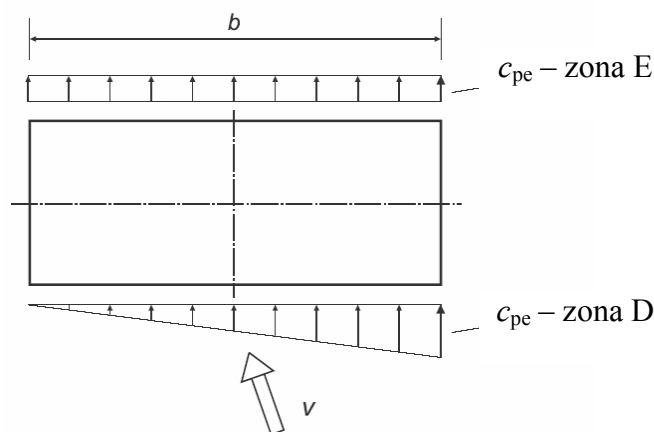


Figura III.3.6 Distribuția presiunii vântului pentru considerarea efectelor de torsiune [2]

Efectele de torsiune generală produse de acțiunea oblică a vântului sau de rafalele necorelate ale vântului acționând pe clădiri / structuri cvasi-paralelipipedice pot fi estimate simplificat considerând aplicarea forței F_w cu o excentricitate $e = b / 10$, unde b este dimensiunea laturii secțiunii transversale a construcției orientată (cvasi)-perpendicular pe direcția vântului.

Bibliografie

1. CNR-DT 207/2008: Istruzioni per la valutazione delle azioni e degli effetti del vento sulle costruzioni, CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
2. EN 1991-1-4 - Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind actions, CEN
3. J. D. Holmes, 2004. Wind Loading of Structures, Taylor & Francis

III.4. Coeficienți aerodinamici de forță și de presiune

Evaluarea efectelor vântului asupra suprafețelor rigide ale clădirilor și structurilor se poate face în două moduri de (i) utilizând coeficienți aerodinamici de presiune și (ii) utilizând coeficienți aerodinamici de forță.

Coeficienții aerodinamici pentru evaluarea efectelor vântului asupra construcțiilor pot fi coeficienți aerodinamici de presiune, de suucțiune și de presiune totală (netă) sau/si coeficienți aerodinamici de forță rezultantă și de moment rezultant, de forță și de moment pe unitatea de lungime, și de frecare.

În regiunea situată în afara stratului limită atașat unui corp viscozitatea și vorticitatea sunt zero; în aceste regiuni relația între presiunea, P și viteza, V a aerului (având densitatea ρ) este dată de ecuația lui Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 = \text{const} \quad (\text{III.4.1})$$

Pentru un corp fix și indeformabil scufundat într-un curent de aer ce se deplasează cu viteza V (în câmp liber) și având presiunea dinamică P (în câmp liber), curgerea aerului va produce presiuni locale p pe suprafața corpului egale cu:

$$p = P_0 - P \quad (\text{III.4.2})$$

unde P_0 și V_0 sunt presiunea, respectiv viteza curentului de aer în imediata vecinătate a corpului (dar în afara stratului limită ce se formează pe suprafața corpului). Conform ecuației lui Bernoulli:

$$\frac{1}{2} \rho \cdot V^2 + P = \frac{1}{2} \rho \cdot V_0^2 + P_0 \quad (\text{III.4.3}).$$

din care se deduce că:

$$p = P_0 - P = \frac{1}{2} \rho (V^2 - V_0^2) \quad (\text{III.4.4}).$$

Presiunile măsurate pe suprafața corpului se raportează la presiunea dinamică a vântului în amonte. Presiunea pe suprafața unui corp se exprimă uzual printr-un coeficient aerodinamic de presiune adimensional:

$$c_p = \frac{p}{\frac{1}{2} \rho V^2} \quad (\text{III.4.5}).$$

în care V este valoarea vitezei vântului în câmp liber, evaluată la o înălțime de referință convențională și ρ este densitatea aerului.

Din relațiile (III.4.4) și (III.4.5) se obține [3]:

$$c_p = \frac{\frac{1}{2}\rho \cdot (V^2 - V_0^2)}{\frac{1}{2}\rho \cdot V^2} = 1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 \quad (\text{III.4.6}).$$

În punctul de stagnare de pe suprafața corpului, acolo unde V_0 este zero, relația (III.4.6) dă un coeficient de presiune egal cu unitatea. Valori ale coeficientului de presiune apropiate de unitate apar în punctul de stagnare pentru un cilindru circular, dar, în cazul unei clădiri, valorile medii cele mai mari pe fața expusă vântului sunt de obicei mai mici decât această valoare teoretică.

Dacă $V_0 < V$ ($P_0 > P$, $p > 0$), curentul de aer încetinește și c_p este pozitiv; această situație este tipică pentru suprafețele frontale expuse vântului incident și, în general, în zonele unde stratul limită rămâne atașat la suprafața corpului. Invers, dacă $V_0 > V$ ($P_0 < P$, $p < 0$), curentul de aer accelerează și c_p este negativ, iar presiunea este numită suucțiune; această situație este tipică pentru suprafețele laterale și, în general, în zonele de separare a stratului limită [2].

Presiunile vântului ce acționează pe fețele exterioare ale unei construcții se evaluează utilizând coeficienți aerodinamici de presiune externă ce se notează cu c_{pe} . În Figura III.4.1 se indică o distribuție tipică a coeficienților de presiune externă pentru un corp având forma de cub. Presiunile ce acționează pe fețele interioare ale construcției se evaluează utilizând coeficienți aerodinamici de presiune internă notați cu c_{pi} .

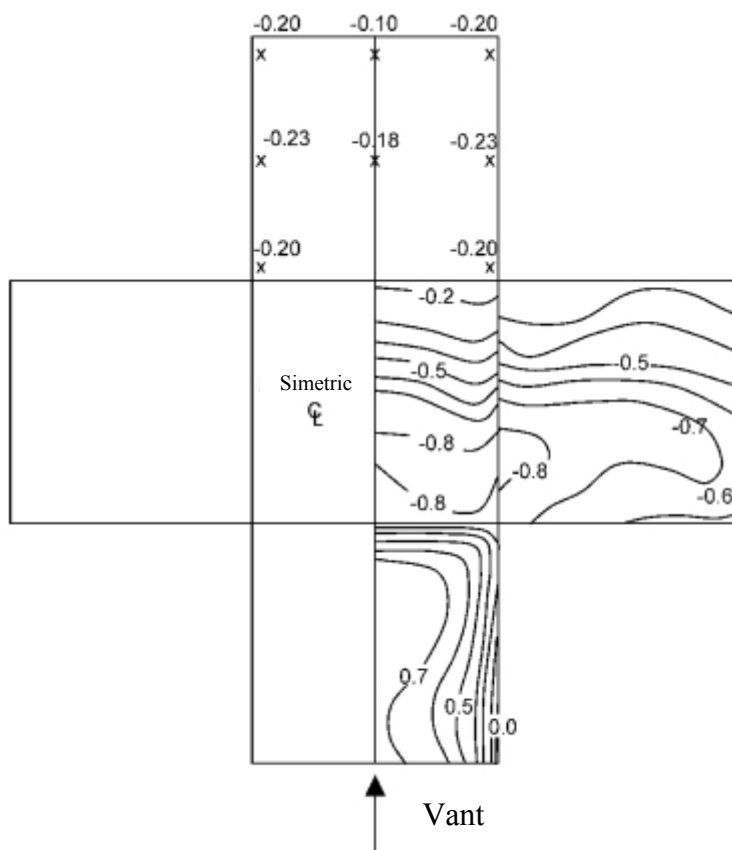


Figura III.4.1. Coeficienți de presiune pe suprafața exterioară a unei clădiri [1]

Acțiunea de ansamblu produsă de presiunea dinamică a vântului asupra unui corp poate fi exprimată prin rezultanta vectorială a tuturor forțelor din vânt care acționează pe suprafețele corpului la exterior și la interior. Direcția acestei forțe rezultante poate fi diferită de direcția vântului. În cazul general, forța rezultantă pe corp poate fi descompusă în trei componente:

- o componentă orizontală pe direcția vântului, denumită forță de antrenare, F_w ;
- o componentă orizontală perpendiculară pe direcția vântului, denumită forță laterală, F_L ;
- o componentă verticală, denumită forță de portanță, F_P .

Cele trei forte dau nastere la un moment de torsiune și două momente de răsturnare.

Coeficientul aerodinamic de forță c_f se definește cu relația

$$c_f = \frac{F_w}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot A_{\perp}} \quad (\text{III.4.7})$$

unde $A_{\perp}$ este aria frontală a corpului perpendiculară pe direcția vântului, V este viteza vântului în câmp liber, evaluată la o înălțime de referință convențională și ρ este densitatea aerului.

Generalizând, coeficienții aerodinamici de forță, c_{fX} , c_{fY} și c_{fZ} , și de moment, c_{mX} , c_{mY} și c_{mZ} , se definesc cu relațiile [2]:

$$c_{f\alpha} = \frac{F_{\alpha}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot L^2}; \quad c_{m\alpha} = \frac{M_{\alpha}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot L^3} \quad \text{cu } \alpha = X, Y, Z \quad (\text{III.4.8})$$

unde L este o dimensiune caracteristică a corpului, V este viteza vântului în câmp liber, evaluată la o înălțime de referință convențională și ρ este densitatea aerului.

Coeficientul de frecare este definit cu relația:

$$c_{fe} = \frac{w_{fe}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2} \quad (\text{III.4.9})$$

unde w_{fr} este acțiunea tangentă pe unitatea de suprafață paralelă cu direcția vântului.

Coeficienții aerodinamici depind, în general, de: geometria și dimensiunile construcției, de unghiul de atac al vântului (poziția relativă a corpului în curentul de aer), de categoria de rugozitate a suprafeței terenului la baza construcțiilor, de numărul Reynolds etc.

Coeficienții de presiune exterioară sunt folosiți pentru determinarea presiunii vântului pe suprafețele rigide exterioare ale clădirilor și structurilor; coeficienții de presiune interioară sunt folosiți pentru determinarea presiunii vântului pe suprafețele rigide interioare ale clădirilor și structurilor.

Coeficienții de presiune exterioară pot fi coeficienți globali și coeficienți locali. Coeficienții locali dau coeficienții de presiune valabili pentru arii expuse de 1 m^2 și sunt folosiți pentru proiectarea elementelor de dimensiuni reduse și a prinderilor. Coeficienții globali dau

coeficienții de presiune valabili pentru arii expuse de peste 10 m² și sunt folosiți pentru proiectarea clădirilor/structurilor sau a elementelor acestora având arii expuse mai mari de 10 m².

Coeficienții de presiune pot lua valori pozitive (pentru presiuni) sau negative (pentru suționi), în funcție de geometria clădirii. Coeficienții de presiune externă au valori pozitive în toate punctele expuse direct vântului și au valori negative pe suprafețe laterale sau neexpuse direct vântului. Valorile pozitive ale coeficientului de presiune pot fi inferioare valorilor negative (considerate în modul) ale coeficientului de presiune.

Coeficienții de presiune totală (netă) au atât valori pozitive cât și negative.

Coeficienții aerodinamici de forță au valori pozitive sau negative, în funcție de geometria corpului analizat și de direcția vântului.

Coeficienții de frecare au întotdeauna valori pozitive.

Coeficienții aerodinamici locali sunt utilizați pentru evaluarea acțiunilor locale ale vântului pentru proiectarea și verificarea elementelor individuale de acoperis sau de fațadă.

Bibliografie

1. Baines, W. D., 1963. *Effects of velocity distributions on wind loads and flow patterns on buildings*, Proceedings, International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures, Teddington, U.K., 26–28 June, 198–225
2. CNR-DT 207/2008: Istruzioni per la valutazione delle azioni e degli effetti del vento sulle costruzioni, CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
3. J. D. Holmes, 2004. *Wind Loading of Structures*, Taylor & Francis

III.5. Coeficientul de răspuns dinamic

III.5.1. Turbulența vântului

(i) Lungimea scării integrale a turbulenței

Fluctuațiile vitezei instantanee a vântului față de medie pot fi descompuse în rafale armonice având pulsații $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$ (unde n este frecvența armonice) și lungimi de undă $\lambda = v_m / n$, unde v_m este viteza medie a vântului în direcție longitudinală.

Scara integrală a turbulenței reprezintă o măsură a dimensiunilor medii ale vârtejurilor turbulente ale curgerii aerului. Lungimea scării integrale a turbulenței în direcție longitudinală (pe direcția vântului) este determinată cu relația [5]:

$$L_v^x = \frac{1}{v^2} \cdot \int_0^\infty R_{v_1 v_2}(x) dx \quad (\text{III.5.1})$$

unde $R_{v_1 v_2}(x)$ este funcția de inter-corelație a componentelor longitudinale ale vitezelor fluctuante v_1 și v_2 măsurate în două puncte oarecare 1 și 2 și $\overline{v^2}$ este valoarea medie pătratică a vitezei fluctuante. Funcția de inter-corelație scade rapid cu distanța între punctele 1 și 2. Fluctuațiile componentelor longitudinale ale vitezei, măsurate în două puncte separate de o distanță considerabil mai mare decât lungimea scării integrale a turbulenței, sunt necorelate.

Fluctuațiile vitezei în raport cu media sunt considerate procese aleatoare staționare de medie zero. O măsură a corelației funcției $v(t)$ la diferite momente de timp separate de un interval τ este dată de funcția de autocorelație:

$$R_v(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot v(t + \tau) dt \quad (\text{III.5.2})$$

În relația (III.5.1) se poate înlocui funcția de inter-corelație în spațiu cu funcția de autocorelație în domeniul timp [5]:

$$L_v^x(z) = \frac{v_m(z)}{v^2} \cdot \int_0^\infty R_v(\tau) d\tau \quad (\text{III.5.3})$$

unde $R_v(\tau)$ este funcția de autocorelație a vitezei fluctuante $v \equiv v(x_1, t)$.

În codurile de proiectare se folosesc relații empirice de forma [1]:

$$L_u^x(z) = c \cdot z^m \quad (\text{III.5.4})$$

unde c și m sunt constante determinate experimental.

Pentru înălțimi z mai mici de 200 m, lungimea scării integrale a turbulenței se poate determina cu relația din [4]:

$$L(z) = \begin{cases} L_t \cdot \left(\frac{z}{z_t} \right)^\alpha, & \text{pentru } z_{\min} \leq z \leq z_{\max} = 200 \text{ m} \\ L(z_{\min}), & \text{pentru } z < z_{\min} \end{cases} \quad (\text{III.5.5})$$

unde înălțimea de referință $z_t = 200 \text{ m}$, lungimea de referință a scării $L_t = 300 \text{ m}$ și $\alpha = 0,67 + 0,05 \cdot \ln(z_0)$.

În Figura III.5.1 este reprezentată variația lungimii scării integrale a turbulenței determinate cu relația (III.5.5), în funcție de înălțimea z și de categoria terenului.

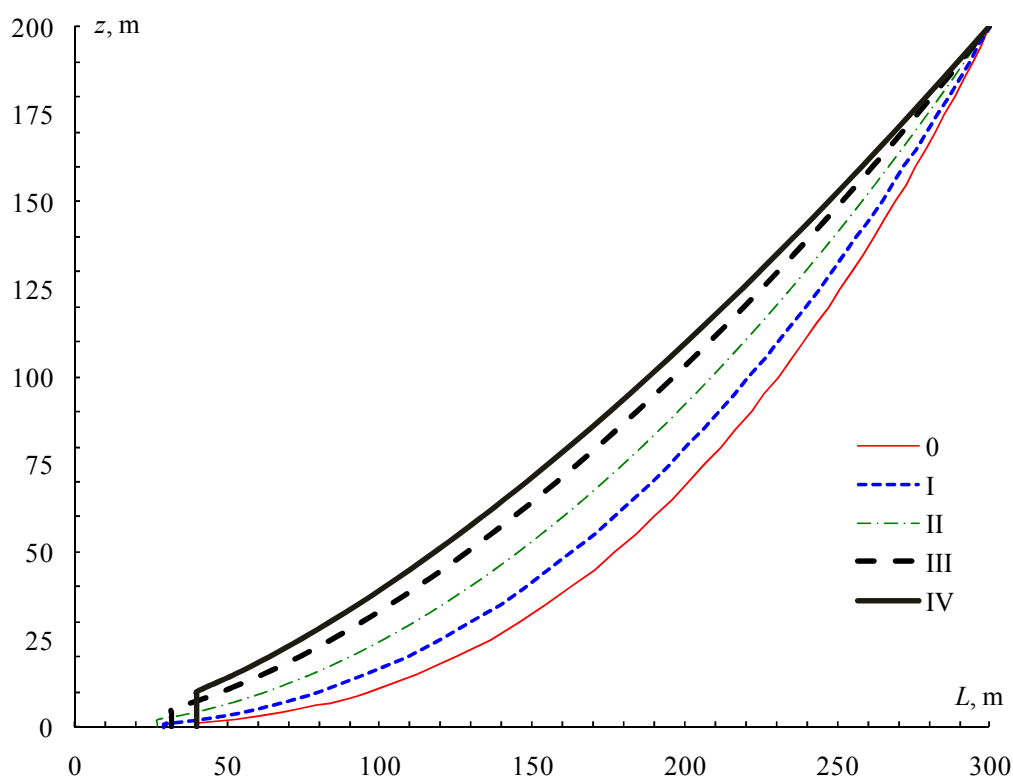


Figura III.5.1 Lungimea scării integrale a turbulenței, $L(z)$

(ii) *Densitatea spectrală de putere a vitezei fluctuante a vântului*

Proprietățile statistice ale fluctuațiilor vitezei față de medie în direcție longitudinală sunt definite complet de densitatea spectrală de putere unilaterală a rafalelor (vitezei fluctuante) pe direcția vântului la cota z , $S_v(z, n)$. Densitatea spectrală de putere descrie distribuția dispersiei fluctuațiilor vitezei în funcție de conținutul de frecvențe al acestora. Dispersia rafalelor longitudinale se obține integrând densitatea spectrală de putere pentru toate frecvențele:

$$\sigma_v^2 = \int_0^\infty S_v(z, n) dn \quad (\text{III.5.6}).$$

Densitatea spectrală de putere poate fi obținută ca transformata Fourier a funcției de autocorelație:

$$S_v(z, n) = 4 \cdot \int_0^{\infty} R_v(\tau) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \tau) d\tau \quad (\text{III.5.7})$$

Densitatea spectrală de putere pentru rafalele longitudinale se normalizează:

$$S_L(z, n) = \frac{n \cdot S_v(z, n)}{\sigma_v^2} \quad (\text{III.5.8})$$

parametrul de normalizare fiind dispersia rafalelor vântului în direcția corespunzătoare.

Aria situată sub densitatea spectrală de putere unilaterală normalizată este egală cu unitatea:

$$\int_0^{\infty} \frac{S_v(z, n)}{\sigma_v^2} dn = \int_0^{\infty} \frac{n \cdot S_v(z, n)}{\sigma_v^2} d \ln(n) = 1 \quad (\text{III.5.9})$$

Densitatea spectrală de putere unilaterală normalizată a rafalelor longitudinale ale vântului din [4,7] este dată de următoarea relație propusă de Solari [1], Figura III.5.2:

$$S_L(z, n) = \frac{n \cdot S_v(z, n)}{\sigma_v^2} = \frac{6,8 \cdot f_L(z, n)}{[1 + 10,2 \cdot f_L(z, n)]^{\frac{5}{3}}} \quad (\text{III.5.10})$$

unde f_L este o frecvență adimensională (coordonată Monin) asociată rafalelor longitudinale și reprezintă raportul între lungimea scării integrale a turbulenței și lungimea de undă a rafalei armonice de frecvență n , $f_L(z, n) = \frac{n \cdot L_v^x(z)}{v_m(z)}$.

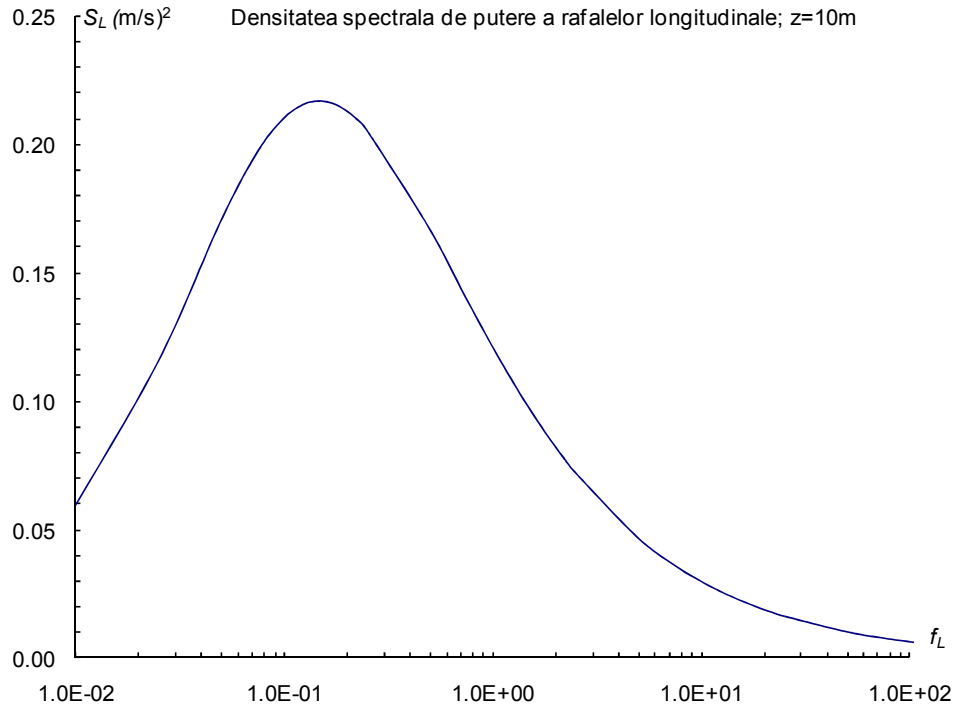


Figura III.5.2. Densitatea spectrală de putere unilaterală normalizată a rafalelor longitudinale

Din relația de calcul a frecvenței adimensionale, $f_L = \frac{n \cdot L}{v_m}$ rezultă că valoarea lungimii scării

integrale a turbulenței, L determină valoarea lungimii de undă, $\lambda = \frac{v_m}{n}$ pentru care apare varful densității spectrale de putere. Cu cât lungimea scării integrale a turbulenței este mai mare, cu atât lungimea de undă este mai mare. Lungimea de undă de varf, ce corespunde varfului densității spectrale de putere (ce apare pentru $f_L = 0,15$) este egală cu $L/0,15$.

III.5.2. Răspunsul structural dinamic

Natura fluctuantă a vitezei vântului, a presiunilor și a forțelor induse de vânt pe structură, poate produce excitarea unui răspuns (cvasi-)rezonant semnificativ, cu condiția ca rigiditatea și amortizarea structurii să aibă valori reduse. Acest răspuns dinamic rezonant va fi diferit de răspunsul fluctuant nerezonant (de fond) (Figura III.5.3) la care sunt supuse toate structurile, indiferent de proprietățile de rigiditate și de amortizare ale acestora.

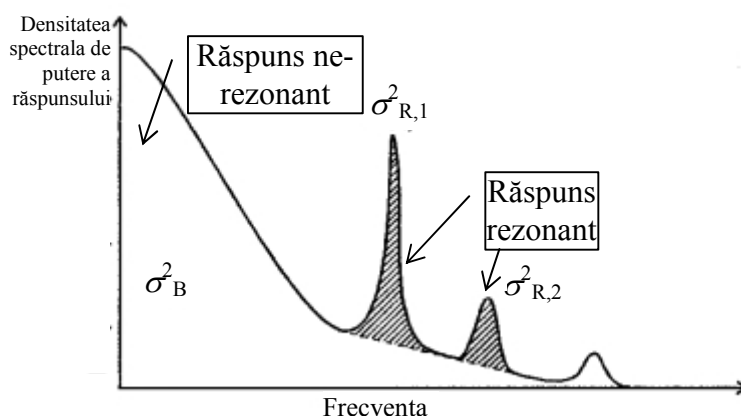


Figura III.5.3. Densitatea spectrală de putere a răspunsului unei structuri cu contribuții rezonante semnificative [2]

Aria de sub densitatea spectrală de putere a răspunsului (Figura III.5.3) reprezintă valoarea medie pătratică (care, pentru procese aleatoare de medie zero, este numeric egală cu dispersia) totală a răspunsului structural fluctuant (răspunsul structural mediu nu este inclus în reprezentare). În Figura III.5.3 este reprezentat (prin zona hașurată) răspunsul structural rezonant pentru primele două moduri de vibrație, $\sigma_{R,1}^2$ și $\sigma_{R,2}^2$. Răspunsul structural nerezonant (de fond), σ_B^2 compus în principal din contribuțiile frecvențelor joase, mai mici decât cea mai joasă frecvență naturală a structurii, este, de obicei, cel mai important contributor la răspunsul structural în direcția vântului. Contribuțiile rezonante devin din ce în ce mai semnificative numeric, și în cele din urmă devin dominante, pe măsură ce structurile

devin mai înalte sau mai lungi (în raport cu lăţimea) şi frecvenţele naturale de vibraţie devin mai mici.

Amplificarea răspunsului structural este cu atât mai mare cu cât structura este mai flexibilă, mai uşoară şi cu amortizare mai redusă. Reducerea răspunsului structural datorită apariţiei nesimultane a valorilor de vârf ale presiunii vântului este cu atât mai mare cu cât suprafaţa construcţiei expusă acţiunii vântului este mai mare.

Răspunsul total pe direcţia vântului turbulent este suma dintre:

- i. o componentă care acţionează practic static, şi
- ii. o componentă rezonantă fluctuantă provocată de acele fluctuaţii ale excitaţiei turbulente având frecvenţa în vecinătatea frecvenţelor proprii de vibraţie ale structurii.

Pentru majoritatea clădirilor / structurilor având frecvenţa fundamentală de vibraţie peste 1 Hz (perioada fundamentală de vibraţie sub 1 s), componenta rezonantă este neglijabilă şi răspunsul la vânt poate fi, în mod simplificat, considerat static.

Pentru clădirile / structurile cu răspuns dinamic la vânt, ponderea componentei rezonante corespunzând frecvenţei fundamentale de vibraţie a structurii este de obicei dominantă faţă de ponderile celorlalte componente ce corespund frecvenţelor modurilor superioare de vibraţie.

Pentru structurile foarte flexibile, precum cabluri, antene, turnuri, coşuri de fum şi poduri, interacţiunea vânt-structură produce un răspuns aeroelastic al acestora.

Coeficientul de răspuns dinamic al construcţiei, c_d consideră atât amplificarea efectelor acţiunii vântului datorită vibraţiilor structurii cvasi-rezonante cu conţinutul de frecvenţă al turbulenţei atmosferice cât şi reducerea efectelor acţiunii vântului datorită apariţiei nesimultane a valorilor de vârf ale presiunii vântului ce se exercită pe suprafaţa construcţiei.

Simplificat, coeficientul de răspuns dinamic, c_d poate fi determinat astfel:

- $c_d = 1$ pentru faţade şi elemente de acoperiş ce au o frecvenţă proprie de vibraţie mai mare de 5Hz; de obicei, deschiderile vitrate mai mici de 3m au frecvenţe proprii mai mari de 5Hz;
- $c_d = 1$ pentru coşurile de fum cu secţiune transversală circulară, care au înălţimea $h < 60$ m şi care respectă condiţia $h < 6,5d$, unde d este diametrul coşului de fum.

În cazul neincadrării în condiţiile indicate mai sus se va utiliza procedura de evaluare detaliată a coeficientului de răspuns dinamic.

Principalele diferenţe între răspunsul dinamic al structurilor la vânt şi cutremur sunt:

- cutremurele au o durată mult mai scurtă decât furtunile, deci sunt considerate acţiuni tranzitorii;
- frecvenţele predominante ale mişcării seismice a terenului sunt, în general, de 10-50 ori mai mari decât frecvenţele dezvoltate în timpul furtunilor;
- la incidenţa cutremurului de proiectare, clădirile şi structurile de importantă normală vor răspunde dincolo de limita elastică a comportării materialelor structurale; la

incidenta vântului de proiectare, clădirile și structurile de importanță normală vor avea un răspuns elastic;

- forțele seismice echivalente ce acționează pe înălțimea unei clădiri sau structuri cu înălțime mare sunt considerate perfect corelate, în timp ce forțele din vânt ce acționează pe înălțime sunt doar parțial corelate.

III.5.3. Procedura de determinare a coeficientului de răspuns dinamic

Determinarea coeficientului de răspuns dinamic la vânt se bazează pe modelarea stochastică a proceselor aleatoare staționare pentru descrierea vitezei vântului, a forțelor generate de vânt pe construcție și a răspunsului structural la vânt.

În anii 1960, A. G. Davenport [2,3] a conturat o abordare a evaluării răspunsului structural indus de vânt pe baza teoriei vibrațiilor aleatoare, așa numită abordare spectrală. Abordarea folosește conceptul de proces aleator staționar pentru a descrie viteza vântului, presiunile și forțele generate de vânt precum și răspunsul structural indus de acțiunea vântului. Descrierea principalelor caracteristici statistice ale excitației și răspunsului se face folosind valori medii, abateri standard, corelații și densități spectrale de putere. Abordarea spectrală folosește calculul în domeniul frecvențelor.

Valorile instantanee ale mărimilor de interes (viteza vântului în amplasament, $V(t)$, forța generată de vânt pe construcție, $F(t)$, deplasarea produsă de vânt, $X(t)$) se descompun într-o componentă medie și o componentă fluctuantă față de medie, variabilă în timp și modelată ca proces stochastic staționar de medie zero:

$$V(t) = v_m + v(t) \quad (\text{III.5.11})$$

$$F(t) = F_m + f(t) \quad (\text{III.5.12})$$

$$X(t) = X_m + x(t) \quad (\text{III.5.13})$$

unde valorile cu indice m reprezintă componentele medii și valorile notate cu litere latine mici reprezintă componentele fluctuante față de medie; componentele fluctuante sunt considerate procese aleatoare staționare normale de medie zero:

$$\overline{v(t)} = \overline{f(t)} = \overline{x(t)} = 0. \quad (\text{III.5.14})$$

În Figura III.5.4 se prezintă grafic elementele abordării spectrale. În rândul de jos se prezintă elementele pentru calculul valorii medii pătratică a răspunsului fluctuant (ce este numeric egală cu dispersia răspunsului fluctuant, deoarece acesta este un proces aleator de medie zero); valoarea medie pătratică a răspunsului fluctuant este obținută prin integrarea densității spectrale de putere a acestuia. Densitatea spectrală de putere a răspunsului fluctuant față de medie se obține din densitatea spectrală de putere a forței aerodinamice, care la rândul ei se obține din densitatea spectrală de putere a rafalelor vântului. Funcțiile de admitanță

aerodinamică și de admitanță mecanică (de transfer) leagă aceste trei densități spectrale. Abordarea este adecvată pentru furtuni în zone temperate (cicloane extra-tropicale) și cicloane tropicale.

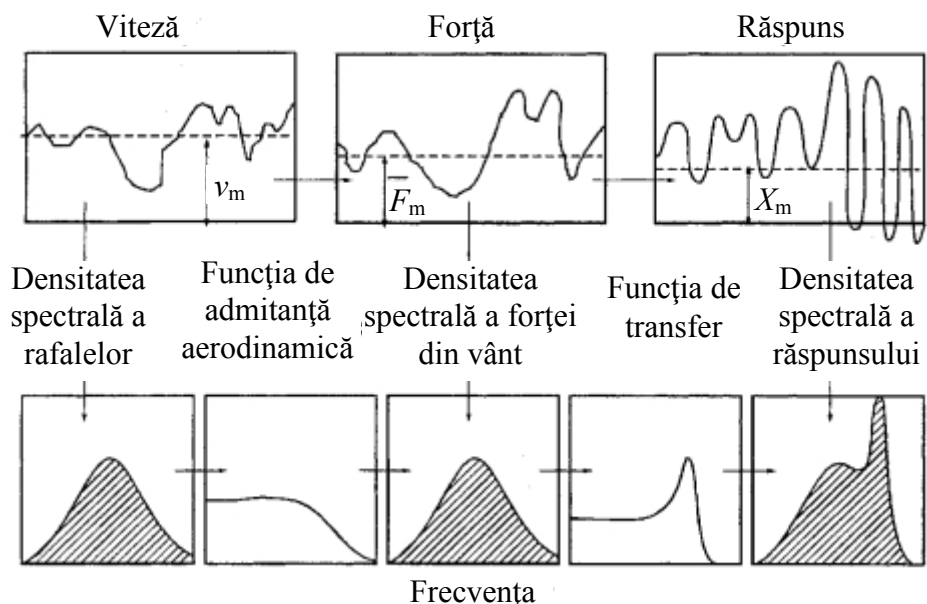


Figura III.5.4. Abordarea folosind vibrații aleatoare pentru determinarea răspunsului dinamic la vânt [5]

Pentru un corp reductibil la un sistem cu un grad de libertate dinamică supus forței din vânt, $F(t)$ se consideră răspunsul dinamic în direcția vântului exprimat în deplasări, $X(t)$. Caracteristicile dinamice ale corpului sunt reprezentate de un sistem masa-resort-amortizor,

Figura III.5.5. Frecvența fundamentală de vibrație a sistemului este $n_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$ și fracțiunea din amortizarea critică este $\xi = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{m \cdot k}}$.

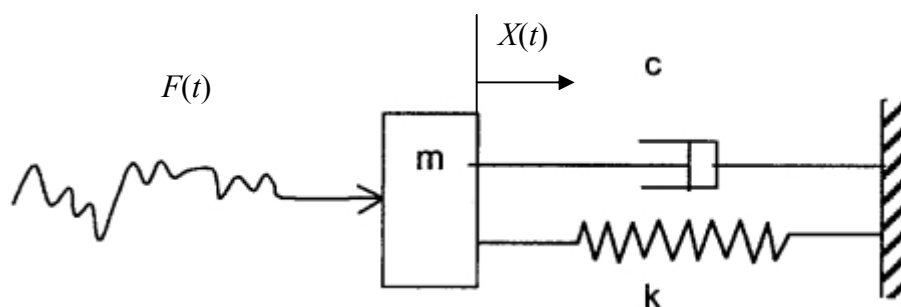


Figura III.5.5 Modelul dinamic simplificat al sistemului cu un GLD [5]

Ecuția de mișcare a sistemului acționat de forța din vânt, $F(t)$ este:

$$m \cdot \ddot{X}(t) + c \cdot \dot{X}(t) + k \cdot X(t) = F(t) \quad (\text{III.5.15})$$

Forța din vânt se descompune în componenta medie și componenta fluctuantă:

$$F(t) = F_m + f(t) \quad (\text{III.5.16})$$

Presiunea în direcția vântului, pe fața expusă acestuia, se descompune de asemenea:

$$P(t) = p_m + p(t) \quad (\text{III.5.17})$$

Valoarea instantanee a presiunii din vânt pe fața expusă este [5]:

$$\begin{aligned} P(t) &= c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2(t) = c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot [v_m + v(t)]^2 = c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot [v_m^2 + v(t)^2 + 2 \cdot v_m \cdot v(t)] = \\ &= c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_m^2 \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{v(t)}{v_m} + \frac{v(t)^2}{v_m^2} \right] \cong c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_m^2 \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{v(t)}{v_m} \right] = \\ &= c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_m^2 + c_p \cdot \rho \cdot v_m \cdot v(t) \end{aligned} \quad (\text{III.5.18})$$

unde ρ este densitatea aerului și c_p este coeficientul aerodinamic de presiune. Neglijarea termenului ce cuprinde raportul pătratelor vitezelor fluctuante și medii produce o eroare în general mai mică de 3%.

Rezultă că:

$$p_m = c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_m^2 \quad (\text{III.5.19})$$

și

$$p(t) = c_p \cdot \rho \cdot v_m \cdot v(t) \quad (\text{III.5.20})$$

Valoarea medie pătratică a presiunii fluctuante este [5]:

$$\overline{p^2} = c_p^2 \cdot \rho^2 \cdot v_m^2 \cdot \overline{v^2} \quad (\text{III.5.21})$$

unde $\overline{v^2}$ este valoarea medie pătratică a vitezei fluctuante.

Relația între presiunea instantanee și forța instantanee din vânt este:

$$F(t) = P(t) \cdot A \quad (\text{III.5.22})$$

unde A este aria feței expuse la vânt a corpului.

Valoarea medie a forței din vânt este [5]:

$$F_m = p_m \cdot A = c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_m^2 \cdot A \quad (\text{III.5.23})$$

și valoarea medie pătratică a forței fluctuante este [5]:

$$\overline{f^2} = c_p^2 \cdot \rho^2 \cdot v_m^2 \cdot \overline{v^2} \cdot A^2 = \left(\frac{1}{4} c_p^2 \cdot \rho^2 \cdot v_m^4 \cdot A^2 \right) \cdot \overline{v^2} \cdot \frac{4}{v_m^2} = \frac{4 \cdot F_m^2}{v_m^2} \cdot \overline{v^2} \quad (\text{III.5.24})$$

Relația (III.5.24) se poate rescrie în termeni de densități spectrale de putere, folosind relațiile:

$$\overline{f^2} = \int_0^{\infty} S_f(n) dn \quad (\text{III.5.25})$$

și

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} S_v(n) dn \quad (\text{III.5.26})$$

Rezultă că:

$$\int_0^{\infty} S_f(n) dn = \frac{4 \cdot F_m^2}{v_m^2} \cdot \int_0^{\infty} S_v(n) dn \quad (\text{III.5.27})$$

obținând astfel relația dintre densitatea spectrală de putere a componentei fluctuante a forței din vânt și densitatea spectrală de putere a componentei fluctuante a vitezei longitudinale a vântului [2, 3, 5]:

$$S_f(n) = \frac{4 \cdot F_m^2}{v_m^2} \cdot S_v(n). \quad (\text{III.5.28})$$

Pentru a obține relația dintre forța din vânt și răspunsul sistemului cu 1 GLD, se separă răspunsul structurii în termeni de deplasare în componenta medie și componenta fluctuantă

$$X(t) = X_m + x(t) \quad (\text{III.5.29})$$

și se introduce pătratul modulului funcției de transfer a sistemului cu un GLD:

$$|H(n)|^2 = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{n}{n_1}\right)^2\right]^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \left(\frac{n}{n_1}\right)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot |H_0(n)|^2 \quad (\text{III.5.30}).$$

În relația (III.5.30) k este rigiditatea sistemului, ξ și n_1 sunt respectiv fracțiunea din amortizarea critică și frecvența proprie de vibrație a sistemului cu un GLD și $|H_0(n)|$ este factorul de amplificare dinamică a răspunsului sistemului cu un GLD expus unei forțe excitatoare armonice.

Relația între valoarea medie a forței din vânt și valoarea medie a deplasării sistemului este:

$$X_m = \frac{1}{k} \cdot |H_0(n=0)| \cdot F_m = \frac{F_m}{k} = \frac{F_m}{m \cdot (2 \cdot \pi \cdot n_1)^2} \quad (\text{III.5.31})$$

Relația între densitatea spectrală de putere a componentei fluctuante a deplasării sistemului și densitatea spectrală de putere a componentei fluctuante a forței din vânt este:

$$S_x(n) = \frac{1}{k^2} \cdot |H_0(n)|^2 \cdot S_f(n) \quad (\text{III.5.32})$$

Combinând relația (III.5.32) cu relația (III.5.28) se obține:

$$S_x(n) = \frac{1}{k^2} \cdot |H_0(n)|^2 \cdot \frac{4 \cdot F_m^2}{v_m^2} \cdot S_v(n) \quad (\text{III.5.33})$$

Relația (III.5.33) este aplicabilă construcțiilor cu arii frontale reduse în raport cu lungimile scărilor turbulenței atmosferice. Intrucât fluctuațiile vitezei nu se produc simultan pe toată suprafața feței expuse vântului, trebuie considerată corelația acestor fluctuații pe suprafața expusă. Pentru a ține seama de acest efect se introduce funcția de admitanță aerodinamică, $\chi^2(n)$, relația (III.5.33) devenind [5]:

$$S_x(n) = \frac{1}{k^2} \cdot |H_0(n)|^2 \cdot \frac{4 \cdot F_m^2}{v_m^2} \cdot \chi^2(n) \cdot S_v(n) \quad (\text{III.5.34})$$

Funcțiile de admitanță aerodinamică $\chi^2(n)$ evaluează gradul de corelație al rafalelor longitudinale pe aria frontală ($b \times h$) a construcției expusă vântului. Funcțiile de admitanță aerodinamică – notate cu R_h și R_b în cod - sunt reprezentate în Figura III.5.6.

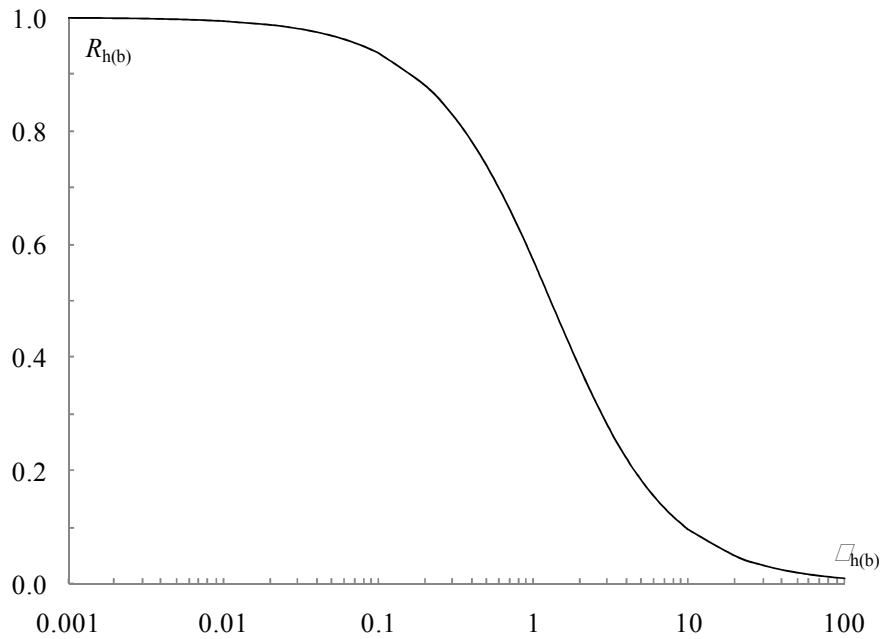


Figura III.5.6 Funcțiile de admitanță aerodinamică, $R_{h(b)}$ [3]

Funcția de admitanță aerodinamică, $\chi^2(n)$ tinde la 1 pentru frecvențe joase și pentru corpuri de dimensiuni reduse. Rafalele cu frecvențe joase sunt aproape perfect corelate și cuprind fața expusă a corpului în totalitate. Pentru frecvențe înalte, sau pentru corpuri cu dimensiuni mari, rafalele nu sunt corelate, admitanța aerodinamică tinde către zero și rafalele nu generează forțe fluctuante totale importante.

Inlocuind în relația (III.5.34) valoarea medie a deplasării (relația III.5.31), se obține [5]:

$$S_x(n) = \frac{4}{v_m^2} \cdot \frac{F_m^2}{k^2} \cdot |H_0(n)|^2 \cdot \chi^2(n) \cdot S_v(n) = \frac{4 \cdot X_m^2}{v_m^2} \cdot |H_0(n)|^2 \cdot \chi^2(n) \cdot S_v(n) \quad (\text{III.5.35})$$

Valoarea medie pătratică a deplasării fluctuante se determină prin integrarea densității spectrale de putere a deplasării pentru toate frecvențele [2, 3, 5]:

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \sigma_X^2 = \int_0^\infty S_X(n) dn = \int_0^\infty \frac{4 \cdot X_m^2}{v_m^2} \cdot |H_0(n)|^2 \cdot \chi^2(n) \cdot S_v(n) dn = \\ &= \frac{4 \cdot X_m^2}{v_m^2} \cdot \sigma_v^2 \cdot \int_0^\infty |H_0(n)|^2 \cdot \chi^2(n) \cdot \frac{S_v(n)}{\sigma_v^2} dn\end{aligned}\quad (\text{III.5.36})$$

Integrala din relația (III.5.36) este evaluată ca suma a două componente ce reprezintă partea nerezonantă (de fond) și, respectiv, partea rezonantă a răspunsului fluctuant, Figura III.5.7:

$$\sigma_X^2 = \sigma_B^2 + \sigma_R^2 \quad (\text{III.5.37}).$$

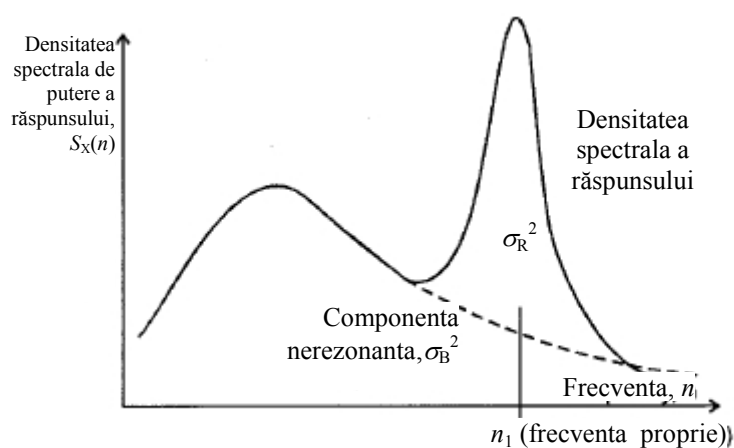


Figura III.5.7. Componenta nerezonanta și componenta rezonanta a răspunsului [5]

Pentru evaluarea componentei nerezonante a răspunsului, se aproximează funcția de transfer (de admitanță mecanică) cu valoarea acesteia pentru $n=0$ $|H_0(n=0)| = 1$; această aproximare este rezonabilă pentru tot intervalul de frecvențe ce definește răspunsul nerezonant, interval în care valoarea funcției de admitanță mecanică este egală cu 1. Cu această aproximare, componenta nerezonantă a răspunsului este [5]:

$$\sigma_B^2 = \frac{4 \cdot X_m^2}{v_m^2} \cdot \sigma_v^2 \cdot \int_0^\infty \chi^2(n) \cdot \frac{S_v(n)}{\sigma_v^2} dn \quad (\text{III.5.38}).$$

Pentru evaluarea componentei rezonante a răspunsului, se considera că pe lățimea de bandă a răspunsului rezonant funcțiile $\chi^2(n)$ și $S_v(n)$ sunt constante și au valorile $\chi^2(n_1)$ și $S_v(n_1)$; această aproximare este rezonabilă pentru sisteme cu amortizare redusă la care funcția de admitanță mecanică are un vârf foarte îngust și pronunțat pentru abscisa $n=n_1$. Cu aceste aproximări, componenta rezonantă a răspunsului este [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_R^2 &= \frac{4 \cdot X_m^2}{v_m^2} \cdot \sigma_v^2 \cdot \int_0^\infty |H_0(n)|^2 \cdot \chi^2(n_1) \cdot \frac{S_v(n_1)}{\sigma_v^2} dn = \\ &= \frac{4 \cdot X_m^2}{v_m^2} \cdot \sigma_v^2 \cdot \chi^2(n_1) \cdot \frac{S_v(n_1)}{\sigma_v^2} \cdot \int_0^\infty |H_0(n)|^2 dn\end{aligned}\quad (\text{III.5.39})$$

Rezultă că valoarea medie pătratică (egală numeric cu dispersia) a deplasării fluctuante este:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sigma_B^2 + \sigma_R^2 \cong \frac{4 \cdot X_m^2}{v_m^2} \cdot \sigma_v^2 \cdot \left[\int_0^\infty \chi^2(n) \cdot \frac{S_v(n)}{\sigma_v^2} dn + \chi^2(n_1) \cdot \frac{S_v(n_1)}{\sigma_v^2} \cdot \int_0^\infty |H_0(n)|^2 dn \right] = \\ &= \frac{4 \cdot X_m^2}{v_m^2} \cdot \sigma_v^2 \cdot (B^2 + R^2) = 4 \cdot X_m^2 \cdot I_v^2 \cdot (B^2 + R^2)\end{aligned}\quad (\text{III.5.40})$$

unde:

$$B^2 = \int_0^\infty \chi^2(n) \cdot \frac{S_v(n)}{\sigma_v^2} dn \quad (\text{III.5.41})$$

și

$$R^2 = \chi^2(n_1) \cdot \frac{S_v(n_1)}{\sigma_v^2} \cdot \int_0^\infty |H_0(n)|^2 dn \quad (\text{III.5.42}).$$

Integrala funcției de admitanță mecanică poate fi evaluată prin metoda polilor și are valoarea:

$$\int_0^\infty |H_0(n)|^2 dn = \frac{\pi \cdot n_1}{4 \cdot \xi} \quad (\text{III.5.43})$$

Valoarea lui R^2 devine:

$$R^2 = \chi^2(n_1) \cdot \frac{S_v(n_1)}{\sigma_v^2} \cdot \frac{\pi \cdot n_1}{4 \cdot \xi} = \left(\frac{n_1 \cdot S_v(n_1)}{\sigma_v^2} \right) \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \xi} \cdot \chi^2(n_1) = \frac{\pi^2}{2 \cdot \delta} \cdot S_L(n_1) \cdot \chi^2(n_1) \quad (\text{III.5.44})$$

unde:

$S_L(n_1)$ este valoarea densității spectrale de putere unilaterale și normalizate determinată pentru frecvența n_1 și

δ - decrementul logaritmic al amortizării; acesta se determină cu relația $\delta \cong 2 \cdot \pi \cdot \xi$.

Factorul de răspuns nerezonant (cvasi-static), B^2 ia în considerare corelația efectivă a valorilor de vârf ale presiunilor pe suprafața expusă la vânt a construcției și este reprezentat în Figura III.5.8. Când suprafața construcției expusă la vânt este mică, atunci $B^2 \rightarrow 1$ (corelație perfectă). Odată cu creșterea suprafeței construcției expuse la vânt, datorită nesimultaneității valorilor de vârf ale presiunilor, B^2 scade progresiv și tinde la zero.

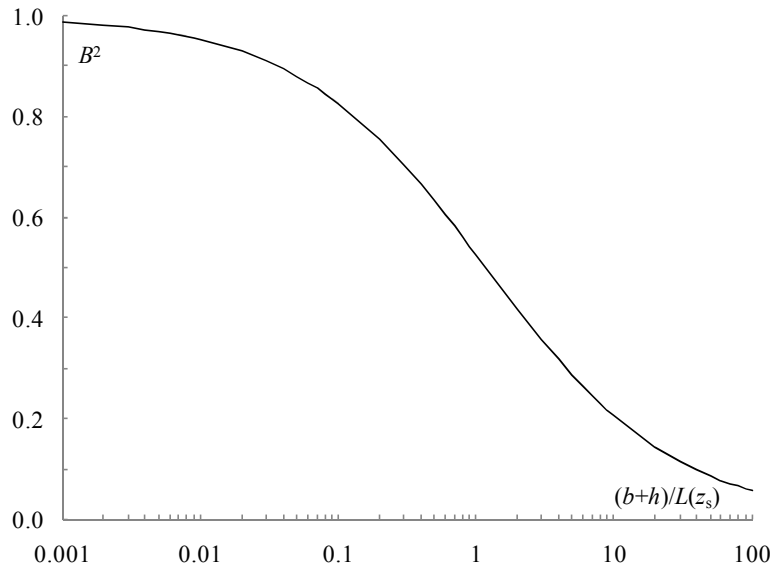


Figura III.5.8 Factorul de răspuns nerezonant (cvasi-static), B^2 [6]

Factorul de răspuns rezonant R^2 depinde de aria A expusă la vânt și de frecvența proprie fundamentală n_1 și crește sensibil pentru valori reduse ale fracțiunii din amortizarea critică a structurii, ξ .

Factorul de rafală al răspunsului este definit ca raportul între valoarea maximă așteptată a răspunsului structural într-o perioadă definită de timp (uzual, 10 minute) și valoarea medie a răspunsului în aceeași perioadă de timp:

$$G = \frac{X_p}{X_m} \quad (\text{III.5.45})$$

Având în vedere că procesul răspunsului structural este staționar și normal, valoarea maximă așteptată a răspunsului structurii cu 1 GLD este [5]:

$$X_p = X_m + k_p \cdot \sigma_X \quad (\text{III.5.46})$$

unde:

k_p – este factorul de vârf al răspunsului ce depinde esențial de intervalul de timp pentru care este calculată valoarea maximă (10 min) și de frecvența proprie a structurii în modul fundamental;

σ_X - este abaterea standard a răspunsului structural.

Folosind relațiile (III.5.40), (III.5.45) și (III.5.46) se obține expresia factorului de rafală al răspunsului:

$$\begin{aligned} G &= \frac{X_p}{X_m} = \frac{X_m + k_p \cdot \sigma_X}{X_m} = 1 + k_p \cdot \frac{\sigma_X}{X_m} = 1 + k_p \cdot \frac{2 \cdot X_m}{v_m} \cdot \frac{\sigma_v}{X_m} \cdot \sqrt{B^2 + R^2} = \\ &= 1 + 2 \cdot k_p \cdot I_v \cdot \sqrt{B^2 + R^2} \end{aligned} \quad (\text{III.5.47})$$

Relația (III.5.47) este folosită pentru estimarea simplă a acțiunii statice echivalente produse de vânt în direcție longitudinală. Abordarea uzuală este de a calcula valoarea factorului de rafală a răspunsului pentru primul mod de vibrație și de a-l aplica la valoarea medie a acțiunii din vânt pe structură, cu care se determină valoarea maximă așteptată a răspunsului structural.

Factorul de rafală G depinde de dimensiunile, de rigiditatea și de amortizarea structurii. Acesta este cu atât mai mare cu cât structura este mai zveltă, mai flexibilă și/sau mai slab amortizată; factorul de rafală este mic în cazul în care structura este rigidă și puternic amortizată.

Factorul de vârf este dat de expresia [3]:

$$k_p = \sqrt{2 \cdot \ln(\nu \cdot T)} + \frac{0,577}{\sqrt{2 \cdot \ln(\nu \cdot T)}} \geq 3 \quad (\text{III.5.48})$$

unde ν este frecvența medie a vibrațiilor structurii expusă vântului incident și T este intervalul de timp pentru care se determină valoarea maximă așteptată a răspunsului. Frecvența medie se determină cu relația [4, 7]:

$$\nu = \sqrt{\frac{\int_0^\infty n^2 \cdot S_x(n) dn}{\int_0^\infty S_x(n) dn}} \cong n_1 \cdot \sqrt{\frac{R^2}{B^2 + R^2}} \quad (\text{III.5.49})$$

Factorul de vârf pentru determinarea răspunsului extrem maxim al structurii, k_p , definit ca raportul dintre valoarea extremă maximă a componentei fluctuante a răspunsului structural și abaterea sa standard este reprezentat în Figura III.5.9.

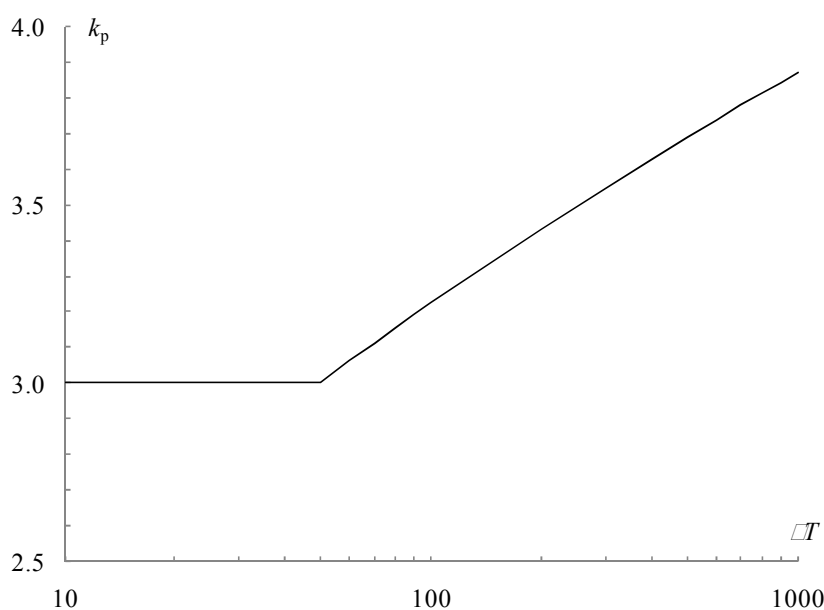


Figura III.5.9 Factorul de vârf, k_p

Coeficientul de răspuns dinamic este definit ca raportul între valoarea maximă așteptată a răspunsului deplasare laterală a structurii ce ține cont de efectele (cvasi)rezonante și de corelația rafalelor pe aria expusă a construcției și valoarea maximă așteptată a răspunsului deplasare laterală a structurii fără aceste efecte:

$$c_d = \frac{G \cdot X_m}{c_{pq} \cdot X_m} = \frac{1 + 2 \cdot k_p \cdot I_v \cdot \sqrt{B^2 + R^2}}{1 + 2 \cdot g \cdot I_v} \quad (\text{III.5.50})$$

În acest sens, coeficientul de răspuns dinamic este raportul între acțiunea statică echivalentă și acțiunea aerodinamică de vârf. Numitorul relației (III.5.50) poate fi scris în această formă deoarece calculul se face în domeniul elastic și există proportionalitate între presiunile (forțele) aerodinamice și răspunsul structural (deoarece valorile maxime așteptate ale presiunii și forței aerodinamice se obțin prin înmulțirea valorii medii a acestora cu factorul de rafală al presiunii).

Relația (III.5.50) se poate deduce și în modul următor: remarcând faptul că valoarea medie a acțiunii aerodinamice, F_m produce valorile medii ale răspunsului structural, X_m se definește acțiunea statică echivalentă, F_{se} , ca fiind o acțiune aerodinamică aplicată static pe structură ce produce valoarea de vârf X_p a răspunsului structural. Ținând cont de liniaritatea problemei, aceasta este dată de relația [5]:

$$F_{se} = F_m \cdot G \quad (\text{III.5.51})$$

unde G este factorul de rafală al răspunsului.

În mod alternativ față de relația (III.5.51), acțiunea statică echivalentă poate fi exprimată cu relația [5]:

$$F_{se} = F_{\max} \cdot c_d = F_m \cdot c_{pq} \cdot c_d \quad (\text{III.5.52})$$

unde $F_{\max} = F_m \cdot c_{pq}$ este valoarea de vârf a acțiunii dinamice și $c_{pq} = (1 + 2 \cdot g \cdot I_v)$ este factorul de rafală al presiunii.

Din relațiile (III.5.51) și (III.5.52) se obține expresia coeficientul de răspuns dinamic:

$$c_d = \frac{G}{c_{pq}} = \frac{1 + 2 \cdot k_p \cdot I_v \cdot \sqrt{B^2 + R^2}}{1 + 2 \cdot g \cdot I_v} \quad (\text{III.5.53}).$$

Coeficientul de răspuns dinamic are, în cele mai multe cazuri, valori apropiate de 1. Valori mai mari ca 1 apar în cazul producerii unui răspuns rezonant semnificativ.

Este important de observat că, spre deosebire de factorul de rafală al răspunsului G , coeficientul de răspuns dinamic longitudinal c_d poate fi mai mare, mai mic sau egal cu 1. Condiția $c_d > 1$ implică $G > c_{pq}$ și conduce la acțiuni statice echivalente mai mari decât acțiunile aerodinamice de vârf; condiția este valabilă pentru structuri flexibile slab amortizate. Condiția $c_d < 1$ implică $G < c_{pq}$ și conduce la acțiuni statice echivalente mai mici decât acțiunile aerodinamice de vârf; condiția este valabilă pentru structuri rigide puternic amortizate [1].

Pentru structurile sau elementele zvelte, flexibile sau cu amortizare redusă, amplificarea răspunsului dinamic prevalează asupra efectelor de reducere cauzate de nesimultaneitatea presiunilor de vârf, și coeficientul răspuns dinamic c_d este de obicei mai mare decât 1. Pentru structurile sau elementele cu suprafețe mari, și/sau rigide și/sau cu amortizare mare, efectele de reducere cauzate de nesimultaneitatea presiunilor de vârf prevalează asupra amplificării răspunsului dinamic, și coeficientul de răspuns dinamic este, de obicei, mai mic decât 1 [1].

Nesimultaneitatea valorilor de vârf ale presiunilor reduce acțiunea aerodinamică de ansamblu, într-o măsură cu atât mai mare cu cât este mai mare corpul luat în considerare. În schimb, amplificarea răspunsului dinamic produsă de oscilațiile rezonante ale structurii dă naștere la deplasări și solicitări cu atât mai mari cu cât structura este mai flexibilă și mai slab amortizată.

Coeficientul de răspuns dinamic se aplică forțelor rezultante (globale) și presiunilor exterioare în direcția vântului.

Înălțimea de referință pentru determinarea coeficientului de răspuns dinamic, z_s se determină conform Figurii III.5.10; pentru cazurile care nu sunt prezentate în Figura III.5.10, z_s poate fi luată ca fiind egală cu h , înălțimea structurii.

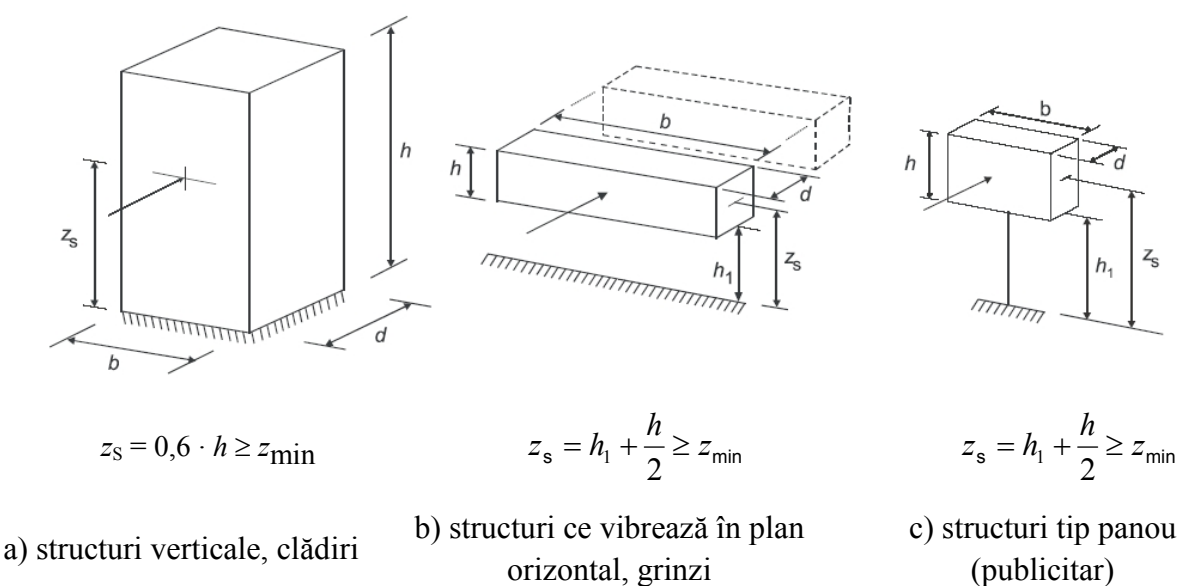


Figura III.5.10 Înălțimea de referință z_s pentru calculul dinamic la vânt al construcțiilor de formă paralelipipedică [3], [7]

Ordinea operațiilor pentru evaluarea coeficientului de răspuns dinamic este sintetizată în Tabelul III.5.1.

Tabel III.5.1 Procedul de calcul al coeficientului de răspuns dinamic

<i>Pasul</i>	<i>Operațiunea</i>
1	Alegerea unui model structural de referință
2	Determinarea parametrilor geometrici b, h, z_e
3	Evaluarea vitezei medii a vântului $v_m(z_s)$
4	Evaluarea intensității turbulenței $I_v(z_s)$
5	Evaluarea scării integrale a turbulenței $L(z_s)$
6	Evaluarea decrementului logaritmic al amortizării structurale, δ_s
7	Evaluarea vectorului propriu fundamental de incovoiere, Φ_I
8	Evaluarea masei echivalente pe unitatea de lungime, m_e
9	Evaluarea decrementului logaritmic al amortizării aerodinamice, δ_a
10	Evaluarea decrementului logaritmic al amortizării produse de dispozitive speciale (mase acordate, amortizori cu lichid etc.), δ_d
11	Determinarea parametrilor dinamici n_I și δ
12	Evaluarea factorului de răspuns nerezonant (cvasi-static) B^2
13	Evaluarea densității spectrale de putere normalizate a fluctuațiilor față de medie a componentei longitudinale a rafalelor, $S_L(z_s, n_1)$
14	Evaluarea parametrilor η_h și η_b
15	Evaluarea funcțiilor de corelație verticală, R_h și transversală, R_b
16	Evaluarea factorului de răspuns rezonant R^2
17	Evaluarea frecvenței așteptate ν
18	Evaluarea factorului de vârf k_p
19	Evaluarea coeficientului de răspuns dinamic c_d

III.5.4. Deplasări și accelerații corespunzătoare stării limită de serviciu a construcției

Pentru clădiri înalte sau flexibile (înălțimea $h \geq 30$ m sau frecvența proprie de vibrație $n_1 \leq 1$ Hz), verificarea la starea limită de serviciu va utiliza valorile maxime ale deplasării și accelerației clădirii pe direcția vântului, prima evaluată la înălțimea $z = z_s$ și cea de a doua la înălțimea $z = h$.

Deplasarea maximă a structurii pe direcția vântului la cota z_s se determină folosind forța statică echivalentă a vântului.

Abaterea standard, $\sigma_{a,x}$ a accelerației caracteristice a structurii pe direcția vântului la cota z se poate obține cu relația:

$$\sigma_{a,x} = \frac{c_f \cdot \rho \cdot b \cdot I_v(z_s) \cdot v_m^2(z_s)}{m_{1,x}} \cdot R \cdot K_x \cdot \Phi_{1,x}(z) \quad (\text{III.5.54})$$

unde:

- c_f este coeficientul aerodinamic de forță
 ρ este densitatea aerului, egală cu 1,25 kg/m³;
 b este lățimea structurii, definită în Figura III.5.10;
 d este lungimea structurii, definită în Figura III.5.10;
 h este înălțimea structurii, definită în Figura III.5.10;
 $I_v(z_s)$ este intensitatea turbulenței la înălțimea $z = z_s$ deasupra terenului;
 $v_m(z_s)$ este viteza medie a vântului pentru $z = z_s$;
 z_s este înălțimea de referință (vezi Figura III.5.10);
 R este radacina patrată a răspunsului rezonant;
 K_x este coeficientul adimensional dat de relația (III.5.55);
 $m_{1,x}$ este masa echivalentă pentru modul fundamental în direcția vântului;
 $n_{1,x}$ este frecvența proprie fundamentală de vibrație a structurii în direcția vântului;
 $\Phi_{1,x}(z)$ este ordonata vectorului propriu fundamental de vibrație pe direcția vântului la cota z .

Coeficientul adimensional K_x se determina cu relația generală:

$$K_x = \frac{\int_0^h v_m^2(z) \cdot \Phi_{1,x}(z) dz}{v_m^2(z_s) \cdot \int_0^h \Phi_{1,x}^2(z) dz} \quad (\text{III.5.55})$$

Coeficientul adimensional K_x este reprezentat în Figura III.5.11.

Accelerațiile caracteristice de vârf ale construcțiilor, $a_{\max,x}$ sunt obținute prin înmulțirea abaterii standard date cu factorul de vârf k_p calculat cu frecvența $\nu = n_{1,x}$:

$$a_{\max,x} = \left(\sqrt{2 \cdot \ln(n_{1,x} \cdot T)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \cdot \ln(n_{1,x} \cdot T)}} \right) \cdot \sigma_{a,x} \quad (\text{III.5.56}).$$

Efectele vântului pe clădiri nu trebuie să producă disconfort ocupanților acestora. Reacțiile de disconfort ale ocupanților depind de amplitudinea și frecvența cu care se produc oscilațiile clădirii și de diverși alți factori fiziologici și psihologici, asociați cu caracteristicile fiecărei persoane.

Pentru a asigura o folosire adecvată a clădirii, se va verifica îndeplinirea condiției:

$$a_{\max,x} \leq a_{\lim} \quad (\text{III.5.57}),$$

unde

$a_{\max,x}$ este valoarea de vârf a accelerației pe direcția vântului la ultimul etaj al clădirii ($z=h$), evaluată cu rel. (III.5.56), pentru o viteză de referință a vântului cu $IMR = 10$ ani;

$a_{\lim}$ este accelerația limită superioară de confort calculată cu relația (III.5.58) [1]:

$$a_{\lim} = \begin{cases} \frac{a_0}{n_{1,x}^{0,56}} & \text{pentru } n_{1,x} < 1 \text{ Hz} \\ a_0 & \text{pentru } 1 \text{ Hz} \leq n_{1,x} \leq 2 \text{ Hz} \\ 0,5 \cdot a_0 \cdot n_{1,x} & \text{pentru } n_{1,x} \geq 2 \text{ Hz} \end{cases} \quad (\text{III.5.58})$$

unde:

$a_0 = 6 \text{ cm/s}^2$ pentru clădiri de birouri;

$a_0 = 4 \text{ cm/s}^2$ pentru clădiri de locuit;

$n_{1,x}$ este frecvența proprie a clădirii corespunzătoare primului mod de vibrație de încovoiere în direcția vântului.

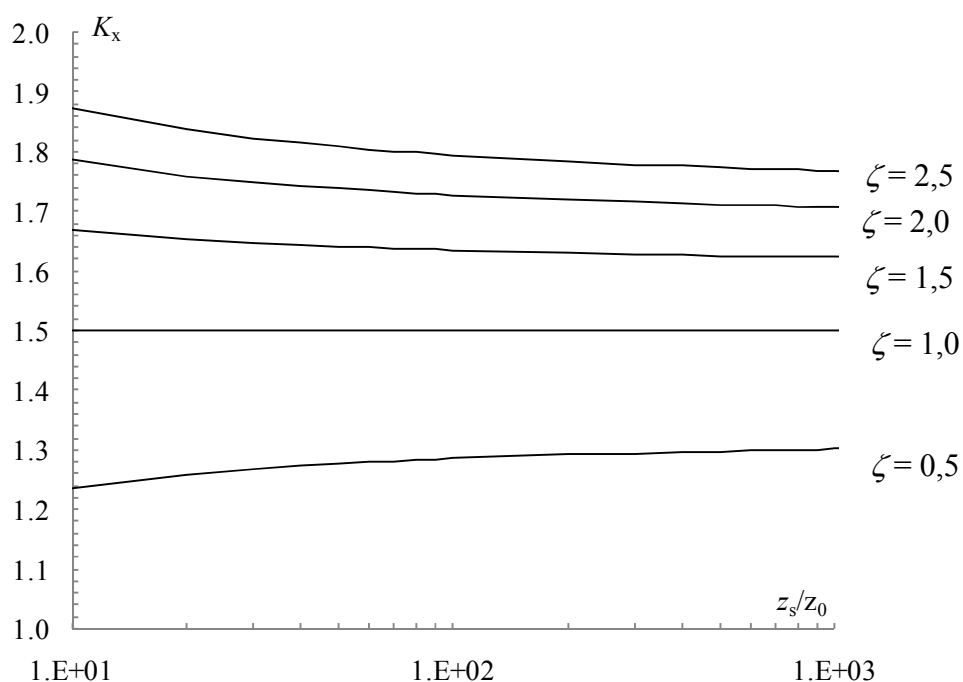


Figura III.5.11 Coeficientului adimensional K_x

Accelerația limită superioară de confort pentru ocupanții clădirii, $a_{\lim}$ este reprezentată în Figura III.5.12.

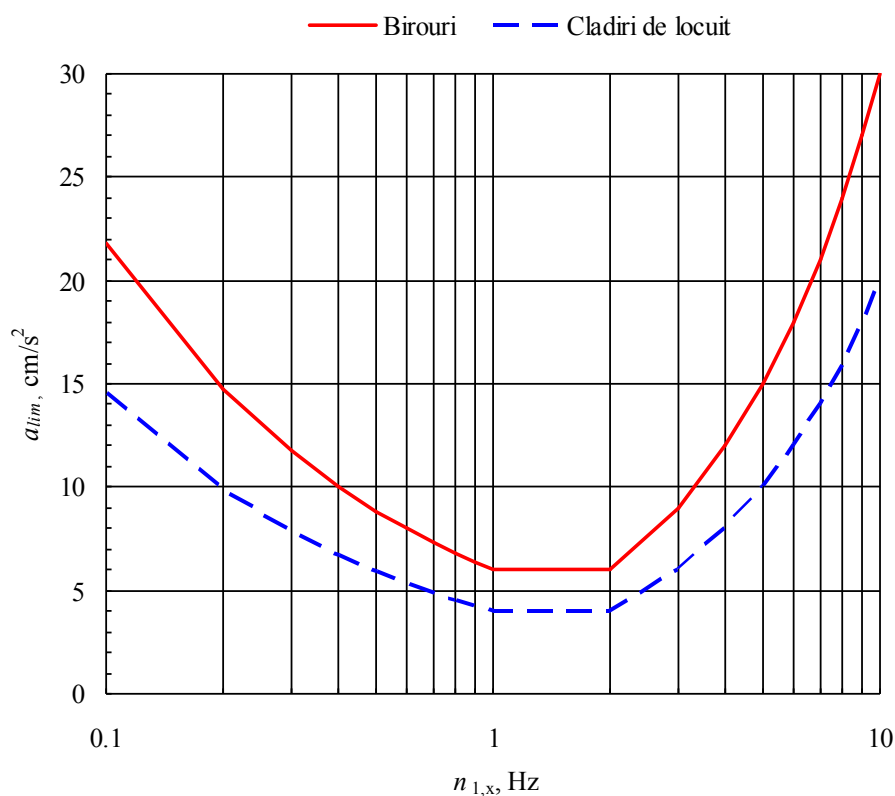


Figura III.5.12 Valori limită ale accelerației clădirii

Bibliografie

1. CNR-DT 207/2008 - Istruzioni per la valutazione delle azioni e degli effetti del vento sulle costruzioni, CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
2. Davenport, A.G., 1963. 'The buffeting of structures by gusts', Proceedings, International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures, Teddington U.K., 26–8 June, 358–91.
3. Davenport, A.G., 1964. 'Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading', Proceedings, Institution of Civil Engineers 28: 187–96
4. EN 1991-1-4 - Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind actions, CEN
5. J. D. Holmes, 2004. Wind Loading of Structures, Taylor & Francis
6. NP 082-04 - Cod de proiectare. Bazele proiectării și acțiuni asupra construcțiilor. Acțiunea vântului, MTCT, 2005
7. SR EN 1991-1-4/NA Eurocod 1: Acțiuni asupra structurilor - Partea 1-4: Acțiuni generale – Acțiuni ale vântului. Anexa națională

III.6. Fenomene aeroelastice

III.6.1. Fenomene de instabilitate aeroelastică generate de vârtejuri

Curgerea aerului produce efecte de antrenare a corpului imersat. Antrenarea este de natură vâscoasă, generată de frecarea aerului de corp și de natură inerțială, generată de presiunea dinamică a aerului asupra corpului.

Antrenarea generată de frecarea dintre aer și suprafața corpului este dominantă pentru curentul de aer atașat și depinde de aria suprafeței corpului expuse curgerii. Antrenarea generată de presiune (de mișcarea turbulentă a aerului la trecerea pe lângă corp) este dominantă pentru curentul de aer ce se separă de corp și depinde de aria suprafeței secțiunii transversale a corpului.

Dacă antrenarea generată de frecarea aerului este dominantă, atunci forma corpului este aerodinamică; dacă antrenarea generată de presiunea aerului este dominantă, atunci forma corpului nu este aerodinamică.

Mișcarea aerului se produce în două moduri:

- mișcarea laminară, caracterizată de deplasarea aerului în straturi paralele;
- mișcarea turbulentă, caracterizată de amestecarea violentă a straturilor de aer.

Pentru valori mici ale vitezelor aerului, forțele vâscoase sunt suficient de mari pentru ca să mențină mișcarea acestuia în straturi paralele. La valori mari ale vitezelor, apar efecte inerțiale importante, mișcarea devenind turbulentă. Apariția unuia din cele două moduri de mișcare este caracterizată de numărul Reynolds, Re ce se definește ca raportul între forțele de inerție și forțele vâscoase dezvoltate în masa de aer în timpul curgerii:

$$Re = \frac{\text{Forța de inerție}}{\text{Forța viscoasă}} = \frac{\rho \cdot V \cdot L}{\mu} = \frac{V \cdot L}{\nu} \quad (\text{III.6.1})$$

unde ρ este densitatea aerului, V este viteza curentului de aer, μ este coeficientul de vâscozitate sau vâscozitatea dinamică a aerului, ν este vâscozitatea cinematică a aerului și L este o dimensiune caracteristică a volumului de aer. Pentru aer la 20°C, $Re = 67000 \cdot V \cdot L$ (V în m/s și L în m). Dacă numărul Reynolds este mare, predomină efectele inerțiale și mișcarea este turbulentă. Dacă numărul Reynolds este mic, predomină efectele vâscoase și mișcarea este laminară.

Pentru construcții zvelte (coșuri de fum, turnuri, cabluri s.a.) este necesar să se ia în considerare efectul dinamic produs de desprinderea vârtejurilor vântului. Fenomenul de desprindere a vârtejurilor produce o acțiune fluctuantă perpendiculară pe direcția vântului, a cărei frecvență depinde de viteza medie a vântului, precum și de forma și de dimensiunile secțiunii în plan a construcției. În cazul în care frecvența de desprindere a vârtejurilor este apropiată de o frecvență proprie de vibrație a construcției se realizează condițiile de cvasi-rezonanță ce produc amplificări ale amplitudinii oscilațiilor construcției, cu atât mai mari cu cât amortizarea și masa structurii sau a elementului sunt mai mici. Condiția de rezonanță este

indeplinită atunci când viteza vântului este teoretic egală cu viteza critică a vântului ce provoacă desprinderea vârtejurilor. În general, viteza critică a vântului pentru multe construcții curențe este o viteză frecventă a acestuia, ceea ce face ca numărul de cicluri de încărcare și fenomenul de oboseală să devină importante. Corpurile ne-aerodinamice produc fenomenul de desprindere a vârtejurilor.

În general, un corp ne-aerodinamic imersat într-un curent de aer produce în urma sa un siaj format din trenuri de vârtejuri alternante (ciclice) care se desprind de corp (Figura III.6.1), cu o frecvență medie de desprindere dată de relația:

$$n_s = \frac{St \cdot v_m}{b} \quad (\text{III.6.2})$$

unde

St este numărul lui Strouhal;

v_m este viteza medie a vântului;

b este o dimensiune caracteristică (de referință) a secțiunii corpului.



Figura III.6.1 Siajul von Karman pentru o secțiune circulară [1]

Fenomenul de producere și de separare a vârtejurilor depinde de numărul Reynolds în sensul că turbulența crește odată cu numărul Reynolds, Figura III.6.2.

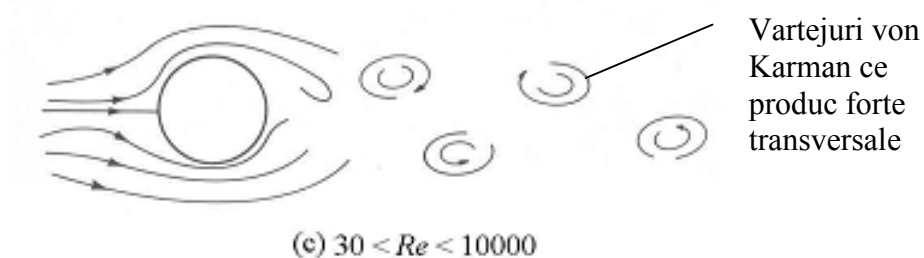


Figura III.6.2. Cilindru de lungime infinită cu secțiune circulară scufundat într-un fluid [1]

În Figura III.6.3 se indică valorile medii orientative ale numărului lui Strouhal, St pentru secțiuni dreptunghiulare.

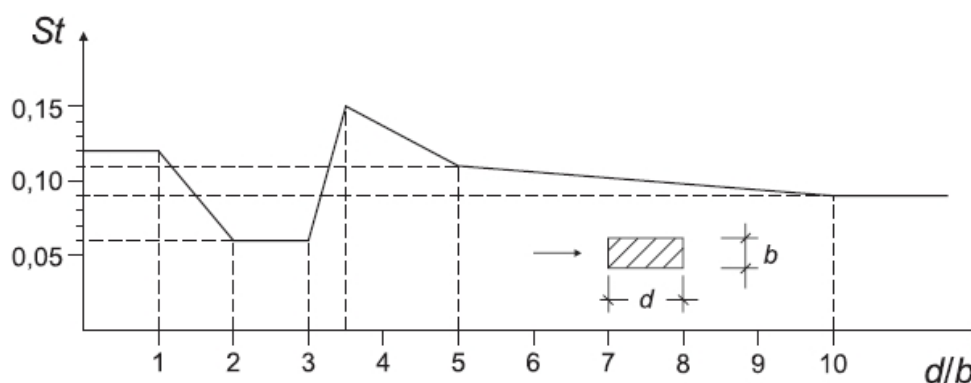


Figura III.6.3 Numărul lui Strouhal St pentru secțiuni transversale dreptunghiulare cu colțuri ascuțite [1], [2]

Viteza critică a vântului pentru modul i de vibrație este definită ca viteza vântului pentru care frecvența de desprindere a vârtejurilor este egală cu o frecvență proprie a structurii și este dată de relația [2]:

$$v_{crit,i} = \frac{b \cdot n_{i,y}}{St} \quad (III.6.3)$$

unde

- b este lățimea secțiunii transversale în care se produce desprinderea rezonantă a vârtejurilor; pentru cilindri circulari lățimea de referință este diametrul exterior;
- $n_{i,y}$ este frecvența proprie a modului i de vibrație pe direcția transversală vântului;
- St este un parametru adimensional numit numărul lui Strouhal, ce depinde de forma secțiunii și de numărul Reynolds.

Efectul desprinderii vârtejurilor va fi considerat dacă este îndeplinită condiția [2]

$$v_{crit,i} \leq 1,25 \cdot v_m \quad (III.6.4)$$

unde:

- $v_{crit,i}$ este viteza critică a vântului pentru modul i de vibrație;
- v_m este viteza medie a vântului în secțiunea în care se produce desprinderea vârtejurilor.

Având în vedere că $n_{1,y} < n_{2,y} < \dots < n_{i,y} < \dots$, rezultă din relația (III.6.3) că $v_{crit,1} < v_{crit,2} < \dots < v_{crit,i} < \dots$, astfel încât cea mai redusă viteză critică corespunde primului mod de vibrație pe direcția transversală vântului. Viteza medie a vântului din relația (III.6.4) depinde de cota z la care se evaluează. Verificarea relației (III.6.4) trebuie făcută pentru fiecare mod de vibrație pe direcție transversală vântului la cota la care amplitudinea vectorului propriu corespunzător este maximă.

Numărul lui Scruton, Sc este un parametru adimensional ce depinde de masa echivalentă, de fracțiunea din amortizarea critică și de dimensiunea de referință a secțiunii. Sensibilitatea la

vibrații depinde de amortizarea structurii și de raportul între masa structurii și masa aerului. Numărul lui Scruton, Sc , este dat de relația [2]:

$$Sc = \frac{2 \cdot m_{ie} \cdot \delta_s}{\rho \cdot b^2} \quad (III.6.5)$$

unde:

m_{ie} este masa echivalentă pe unitatea de lungime pentru modul i de vibrație în direcție transversală;

δ_s este decrementul logaritmic al amortizării structurale;

ρ este densitatea aerului, a cărei valoare este $1,25 \text{ kg/m}^3$;

b este dimensiunea secțiunii transversale, evaluată în secțiunea în care se produce fenomenul critic de desprindere a vârtejurilor rezonante.

Când vârtejurile se desprind în rezonanță cu oscilațiile unei structuri usoare și / sau slab amortizate și caracterizată de un număr Scruton scăzut, fenomenul tinde să devină auto-excitat (sau de interacțiune aer-structură), și dă naștere efectului de sincronizare. În aceste cazuri, tendința nu mai este ca desprinderea de vârtejuri să excite structura, ci structura este cea care comandă desprinderea de vârtejuri, astfel dând naștere unui fenomen de amplificare semnificativ [1].

Conform relației (III.6.2), dependența între frecvența de desprindere a vârtejurilor, n_s și viteza medie a vântului, v_m este liniară, Figura III.6.4a. În realitate, această lege nu mai este valabilă pentru viteze mai mari ca $v_{cr,i}$ într-un interval de viteze $\Delta v_{cr,i}$, numit de auto-control (sau de sincronizare), ce este cu atât mai mare cu cât numărul lui Scruton este mai mic, Figura III.6.4b [1].

Când numărul Scruton este mare (Figura III.6.4a), desprinderea vârtejurilor provoacă o forță alternantă transversală care, la rândul său, produce o vibrație cvasi-rezonantă. În cazul în care numărul Scruton este mic, desprinderea vârtejurilor produce vibrații atât de ample încât acestea devin principalul mecanism de control al desprinderii alternante de vârtejuri. Prin urmare, desprinderea vârtejurilor se manifestă cu frecvența proprie de vibrație a structurii pentru intervalul de viteze indicat în Figura III.6.4b [1].

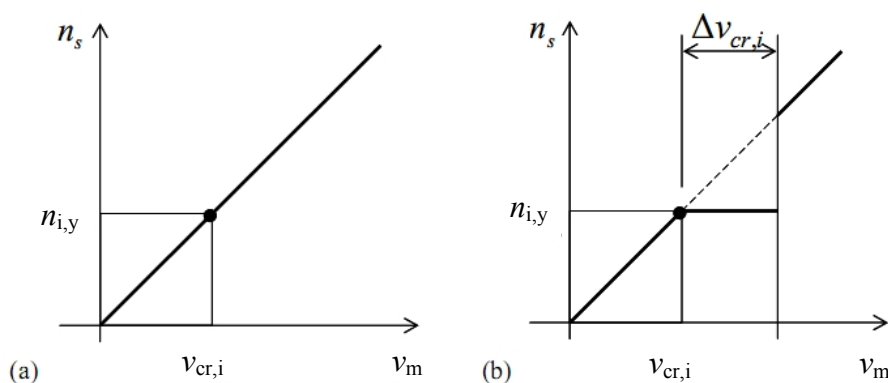


Figura III.6.4 Legea lui Strouhal pentru numere Scruton mari a) și mici b) [1]

Figura III.6.5 arată ceea ce se întâmplă în domeniul de încălcare a legii lui Strouhal, folosind rezultate obținute experimental în tunelul de vânt pentru modelul unui coș de fum [1]. În abscisă este reprezentată valoarea normalizată a vitezei medii și în ordonată este dată valoarea normalizată a abaterii standard a răspunsului transversal la varful structurii.

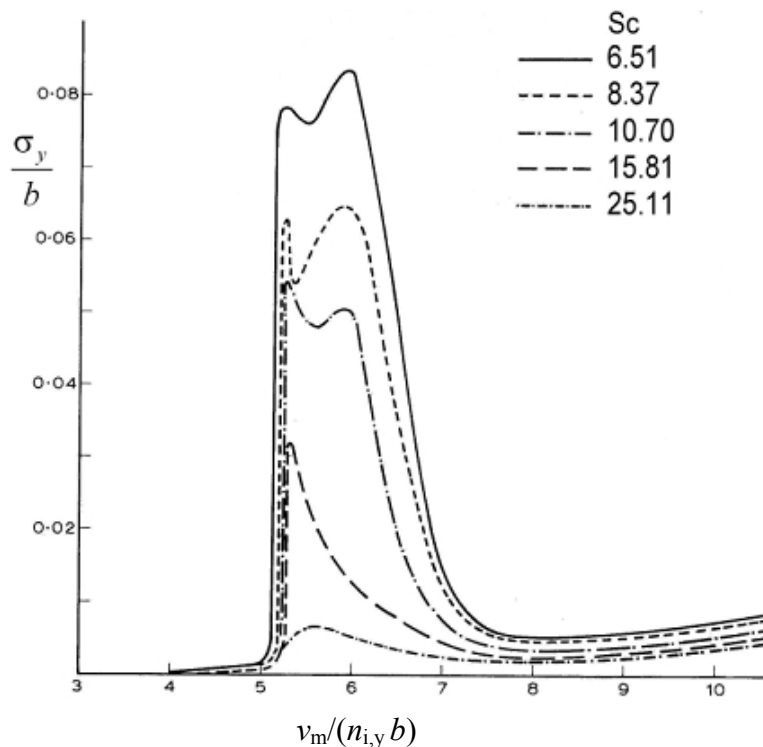


Figura III.6.5 Răspunsul transversal generat de desprinderea vârtejurilor [1]

Figura III.6.6 reproduce rezultatele prezentate în Figura III.6.5, raportând în abscisa și în ordonata, respectiv, numărul lui Scruton și valoarea normalizată a abaterii standard a răspunsului transversal la varful structurii. Se observă trei regimuri distincte. Pentru valori mari ale numărului lui Scruton, vibrațiile sunt forțate de desprinderea vârtejurilor și au proprietăți aleatoare (Figura III.6.7a). Pentru valori mici ale numărului lui Scruton, vibrațiile sunt auto-excite de structură și au caracteristici deterministe (Figura III.6.7b). Pentru valori intermediare ale numărului lui Scruton, se face tranziția între cele două domenii și vibrațiile au caracteristici de tip mixt (Figura III.6.7c) [1].

Domeniul de tranziție se atinge pentru numere Scruton de ordinul 5-30, și marchează trecerea de la răspunsul dinamic clasic la comportamentul aeroelastic. Aceasta dă naștere la o creștere bruscă și violentă a vibrațiilor. În general se impune ca structura să nu intre în acest domeniu și să rămână în domeniul vibrațiilor forțate. Este de reținut pentru acest fenomen rolul benefic al turbulenței; creșterea acesteia tinde să mute tranziția către numere Scruton reduse, întârziind intrarea structurii în domeniul de evitat [1].

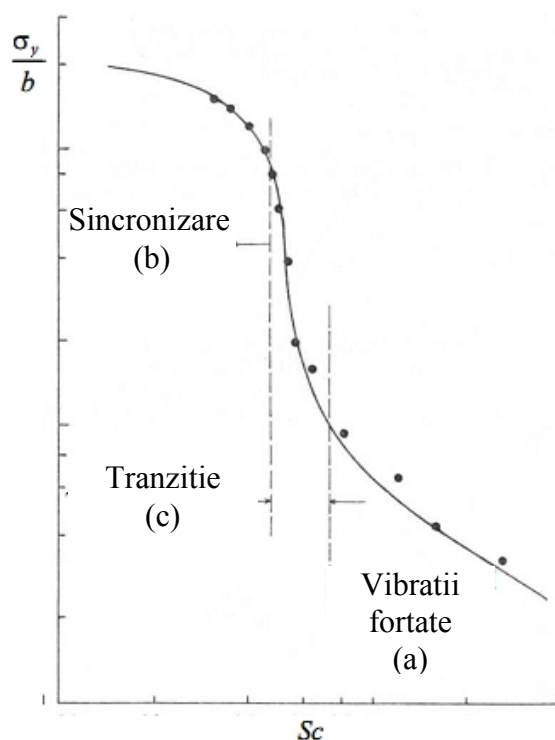


Figura III.6.6 Domenii ale răspunsului transversal generat de desprinderea vârtejurilor [1]

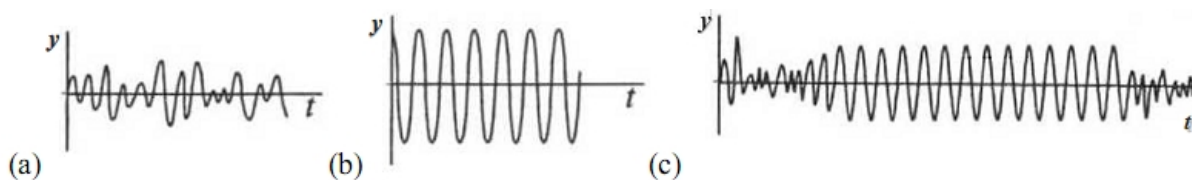


Figura III.6.7 Regimurile de răspuns forțat a), auto-excitat b) și de tranziție c) [1]

În condiții de rezonanță, cu cât numărul Scruton este mai mic (deci, cu cât structura este mai ușoară și/sau mai slab amortizată), cu atât amplificarea răspunsului este mai mare. Se pot distinge următoarele situații [1]:

- pentru $Sc > 30$, fenomenul de desprindere de vârtejuri nu produce, în general, efecte severe; totuși, este recomandată efectuarea unei verificări;
- pentru $5 \leq Sc \leq 30$, fenomenul de desprindere de vârtejuri este sensibil, în primul rând la intensitatea turbulenței; valorile ridicate ale intensității turbulenței reduc riscul de vibrații violente, iar valorile reduse ale intensității turbulenței pot excita acest fenomen;
- pentru $Sc < 5$, vibrațiile induse de desprinderea de vârtejuri pot fi de amplitudine mare și foarte periculoase.

Modelul armonic al forței transversale cauzate de desprinderea vârtejurilor este aplicabil doar în cazul unei curgeri laminare; odată cu creșterea turbulenței, conținutul armonic (de frecvențe) al forței transversale este distribuit pe o bandă din ce în ce mai largă a spectrului de frecvențe, cu toate că rămâne centrat pe frecvența n_s . Astfel, în timp ce răspunsul longitudinal tinde să crească odata cu creșterea turbulenței, aceasta atenuează răspunsul produs de desprinderea vârtejurilor transversale [1].

III.6.2. Alte fenomene aeroleastice

III.6.2.1. Principii generale

Se numesc aeroelastice acele fenomene de interacțiune vânt-structură care apar atunci când oscilațiile structurilor sau ale elementelor acestora sunt caracterizate de deplasări și/sau de viteze atât de mari încât modifică fluxul incident și acțiunile aerodinamice care ar fi fost produse de către vânt asupra corpului fix. Sunt sensibile la aceste fenomene structurile ușoare, foarte flexibile, cu amortizare redusă, cum ar fi: antene, cosuri de fum, stâlpi de iluminat și turnuri de iluminat, poduri și pasarele susținute de cabluri, cabluri și structuri compuse din cabluri, elemente individuale ale fermelor.

În general, acțiunea vântului poate fi reprezentată prin suprapunerea acțiunii aerodinamice, independentă de mișcarea structurii sau a elementelor sale, cu acțiunea aeroelastică, datorată mișcării corpului în curentul de aer. Aceste acțiuni aeroelastice schimbă răspunsul structurii prin modificarea, în termeni echivalenți, a amortizării și/sau a rigidității structurale.

Pentru structurile foarte flexibile mișcarea acestora în fluxul incident poate produce forțe aeroelastice ce măresc amplitudinea vibrațiilor structurii, care la rândul lor măresc forțele aeroelastice, producându-se astfel o situație instabilă în care o mică perturbare poate iniția o amplitudine crescătoare a vibrațiilor. Acest fenomen se numeste instabilitate aerodinamică (de ex.: galoparea liniilor de transport de electricitate acoperite cu gheață, fluturarea cablurilor sau a tablierelor podurilor suspendate cu deschidere mare). Pe de altă parte, forțele de amortizare aerodinamică pot acționa astfel încât să reducă amplitudinea vibrațiilor induse de vânt (de ex.: vibrațiile longitudinale ale structurilor înalte de tip turn cu zăbrele).

Viteza critică a vântului este acea valoare de la care apare un comportament instabil al structurii. Este necesar ca toate vitezele critice asociate structurii și componentelor sale să fie mai mari decât valoarea de varf a vitezei vântului.

Principalele fenomene aeroelastice sunt galoparea, divergența torsională, fluturarea și amortizarea aeroelastică.

III.6.2.2. Galoparea

Galoparea este o formă de instabilitate aeroelastică caracterizată de reducerea și chiar anularea amortizării totale a structurii. Fenomenul este posibil să se producă, chiar la viteze modeste ale vântului, la cablurile suspendate a căror secțiune transversală poate fi modificată de prezența unui strat de gheață, și la cablurile inclinate, tipice pentru podurile hobanate, a căror secțiune transversală poate fi modificată de prezența apei pluviale care se prelinge pe acestea. Fenomenul este de asemenea posibil să se producă, pentru viteze critice ridicate, la structuri înalte și zvelte (stalpi de iluminat).

Galoparea este o instabilitate de tip dinamic ce se poate produce la structurile si/sau elemente zvelte, usoare și cu amortizare structurală redusă, cu secțiuni transversale de formă necirculară (de ex: rectangulară, L, I, U, T) și care, în anumite condiții, pot avea oscilații transversale de mare amplitudine.

Galoparea este rezultatul acțiunii combinate a forței aerodinamice transversale (portante), f_L și longitudinale (de antrenare), f_D ce acționează asupra structurii sau a elementului structural considerat, Figura III.6.8a) și se manifestă ca o vibrație în direcție transversală vântului, de tip translație pură [1].

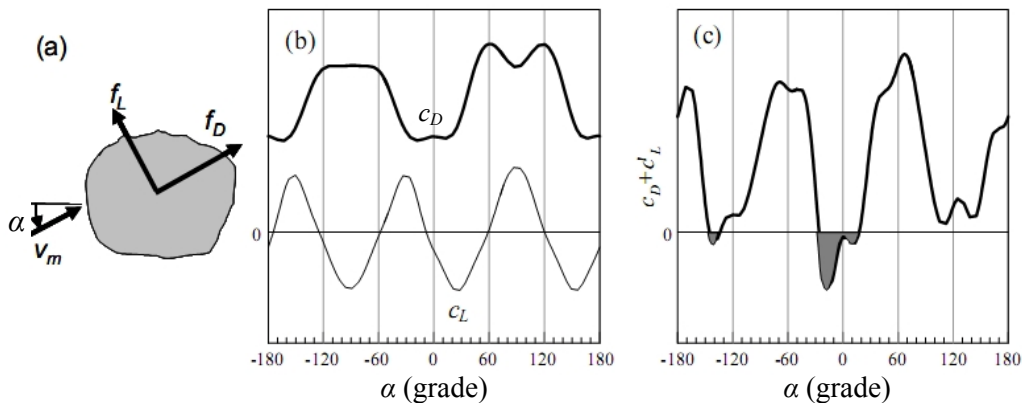


Figura III.6.8 a) forțe aerodinamice de antrenare și de portanță; b) coeficienți aerodinamici de antrenare, c_D și de portanță, c_L ; c) condiția necesară de galop (relația III.6.6) [1]

Condiția necesară pentru galopare în direcție transversală vântului este (Figura III.6.8c) [1]

$$\left(c_D + \frac{dc_L}{d\alpha} \right)_\alpha < 0 \quad (III.6.6)$$

in care:

$\frac{dc_L}{d\alpha}$ este valoarea primei derivate, în raport cu unghiul de atac α , a coeficientului aerodinamic de portanță, evaluată pentru valoarea α a unghiului de atac;

c_D este valoarea coeficientului aerodinamic de antrenare evaluat pentru aceeași valoare a unghiului de atac, α (Figura III.6.8b).

Relația (III.6.6) este cunoscută sub numele de „criteriul lui Den Hartog”. Zona gri din Figura III.6.8c evidențiază valorile unghiului de atac pentru care relația (III.6.6) este satisfăcută și structura (elementul structural) poate fi supusă fenomenului de galopare.

Deoarece coeficientul de antrenare c_D este strict pozitiv pentru orice secțiune, o structură (element structural) poate deveni instabilă în direcție transversală fluxului numai în cazul în care prima derivată a coeficientului de portanță c'_L este negativ și mai mare în modul decât coeficientul de antrenare c_D . În particular, secțiunile circulare (de ex., cabluri) nu pot galopa din cauza simetriei polare în raport cu fluxul incident (ce implică $c'_L=0$). Atunci când secțiunea unui cablu este acoperită cu gheață sau cu un film de apă, schimbarea formei poate produce condițiile necesare fenomenului de galopare.

III.6.2.3. Amortizarea aeroelastică

Amortizarea totală este suma între amortizarea structurală și cea aeroelastică. Dacă amortizarea aeroelastică are semn diferit față de amortizarea structurală, atunci amortizarea totală se reduce și se anulează complet pentru o viteză medie numită viteză critică de galopare.

Amortizarea aeroelastică poate acționa și în sensul reducerii amplitudinilor vibrațiilor induse de vânt (așa cum se întâmplă în cazul vibrațiilor longitudinale ale structurilor înalte de tip stalp cu zăbrele).

Pentru a ilustra fenomenul de amortizare aerodinamică se consideră mișcarea unui corp cu secțiune pătrată în direcția vântului, Figura III.6.9. Se ignoră efectele turbulenței vântului, considerându-se doar viteza medie a vântului, v_m .

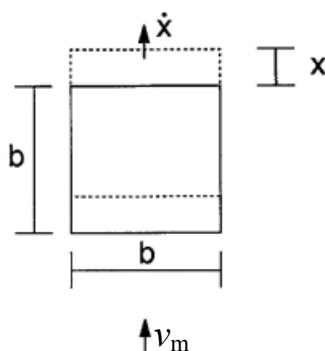


Figura III.6.9 Mișcarea relativă în direcția vântului și amortizarea aerodinamică [3]

Dacă viteza de mișcare a corpului în direcția vântului este $\dot{x}$, viteza relativă a aerului în raport cu corpul este $v_m - \dot{x}$. Forța aerodinamică în direcția vântului pe unitatea de lungime a corpului este [3]:

$$\begin{aligned}
f_x &= c_{fX} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot b \cdot \left(v_m - \dot{x} \right)^2 = c_{fX} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot b \cdot v_m^2 \cdot \left(1 - 2 \frac{\dot{x}}{v_m} + \frac{\dot{x}^2}{v_m^2} \right) \cong \\
&\cong c_{fX} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot b \cdot v_m^2 \cdot \left(1 - 2 \frac{\dot{x}}{v_m} \right) = c_{fX} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot b \cdot v_m^2 - c_{fX} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot b \cdot 2 \cdot v_m \cdot \dot{x}
\end{aligned}
\tag{III.6.7}$$

În relația (III.6.7) se negligează termenul de ordin doi deoarece, în general $v_m \gg \dot{x}$. Primul termen al formei finale a relației (III.6.7) reprezintă forța produsă de vânt pe corpul fix și cel de al doilea este o cantitate proporțională cu viteza structurii și reprezintă o formă de amortizare.

Ecuția de mișcare a corpului sub acțiunea fluxului incident este:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = f_x(t) \tag{III.6.8}.$$

Înlocuind forța aerodinamică din relația (III.6.7) în ecuația de mișcare (III.6.8) și transferând cel de al doilea termen al relației (III.6.7) în partea stângă se obține [3]:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + \left[c + c_{fX} \cdot \rho_a \cdot b \cdot v_m(t) \right] \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = c_{fX} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot b \cdot v_m^2(t) \tag{III.6.9}.$$

În relația (III.6.9) se observă creșterea amortizării totale prin adunarea amortizării aeroleastice la amortizarea structurală, reducându-se în acest fel răspunsul structural.

Bibliografie

1. CNR-DT 207/2008: Istruzioni per la valutazione delle azioni e degli effetti del vento sulle costruzioni, CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
2. EN 1991-1-4 - Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind actions, CEN
3. J. D. Holmes, 2004. Wind Loading of Structures, Taylor & Francis

IV. EVALUAREA HAZARDULUI SEISMIC

IV.1. Definitii

- Hazard seismic – o marime caracteristica a cutremurului ce poate produce avarii sau pierderi (de ex.: amplitudinea miscarii terenului intr-un anumit interval de timp);
- Analiza probabilistica a hazardului seismic – metodologie pe baza careia se determina frecventa/rata medie (numar mediu de evenimente pe unitate de timp) cu care se va produce un anumit hazard seismic. In mod curent, hazardul seismic se calculeaza ca frecventa/rata medie (asteptata) cu care o amplitudine a miscarii terenului va depasi o valoare specificata;
- Curba de hazard seismic – o curba ce reprezinta frecventele/ratele medii cu care anumite valori ale unui hazard seismic (de ex.: amplitudinea miscarii terenului) sunt asteptate sa fie depasite; de obicei, unitatea de timp este 1 an;
- Incertitudine aleatoare – incertitudine probabilistica ce este inerenta intr-un fenomen aleator si care nu poate fi redusa prin acumularea de date sau informatii suplimentare;
- Incertitudine epistematica (de cunoastere) – incertitudine ce provine din lipsa de cunoastere a unui model sau parametru; acest tip de incertitudine poate fi redus, cel putin conceptual, prin acumularea de date suplimentare sau de cunostinte imbunatatite;
- Interval mediu de recurenta – timpul mediu intre producerea unui anumit tip de cutremur cu o anumita caracteristica – de exemplu, un cutremur cu o magnitudine specificata – intr-o regiune sau dintr-o sursa seismica; intervalul mediu de recurenta se refera la recurenta cauzelor;
- Perioada medie de revenire – timpul mediu intre producerea unui hazard seismic – de exemplu, o anumita amplitudine a miscarii terenului, sau un anumit nivel de avariere sau de pierderi – intr-un amplasament; perioada medie de revenire se refera la recurenta efectelor.

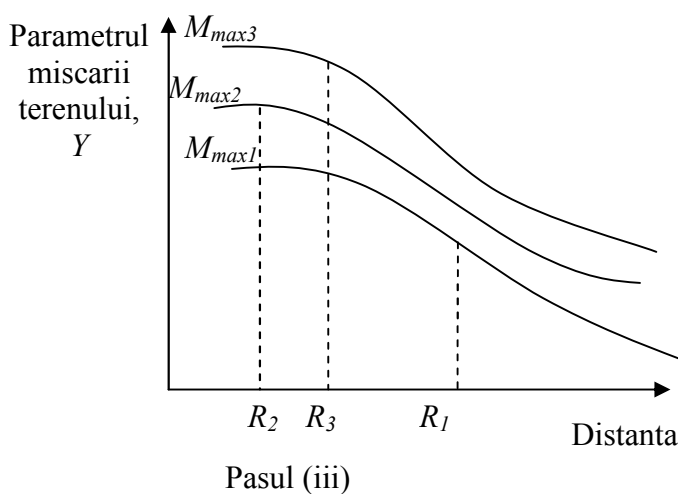
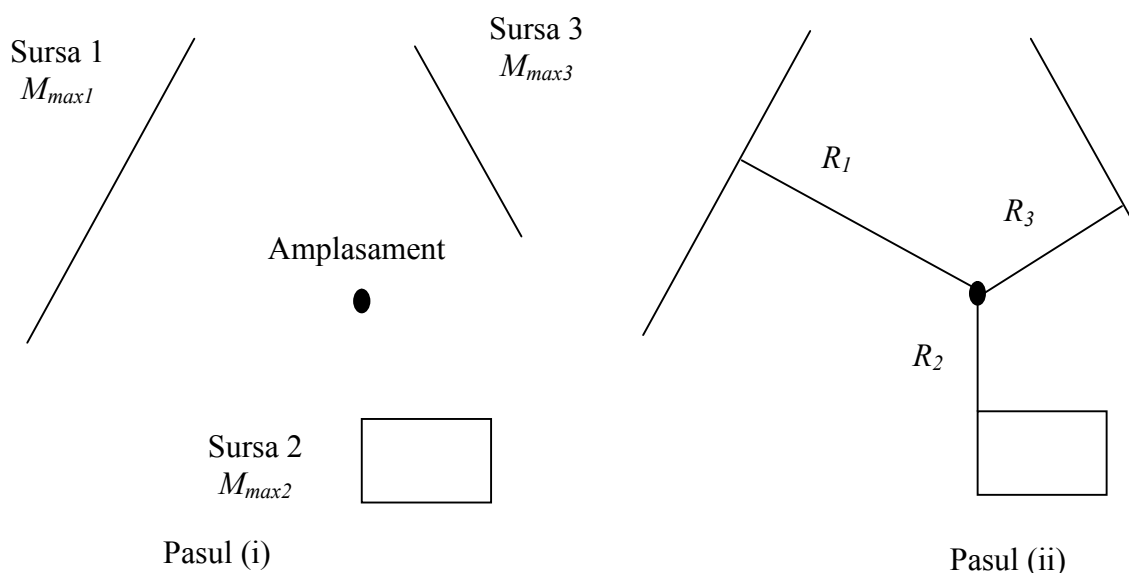
Analiza probabilistica a hazardului seismic (*APHS*) da o descriere probabilistica (o frecventa medie de depasire) a unei marimi caracteristice a cutremurului, precum amplitudinea miscarii terenului. Scopul *APHS* este de a dezvolta elementele necesare pentru luarea unei decizii rationale asupra sigurantei seismice a fondului construit existent si viitor.

IV.2. Analiza determinista a hazardului seismic

Analiza determinista a hazardului seismic (*ADHS*) dezvolta un scenariu seismic particular cu care se evalueaza amplitudinea miscarii terenului intr-un amplasament. Realizarea unui

scenariu seismic inseamna postularea producerii unui cutremur de o marime data intr-o pozitie data. *ADHS* se efectueaza in urmatoorii pasi, Fig. IV.1 [2]:

- (i) Identificarea si caracterizarea surselor seismice ce pot afecta amplasamentul – pentru fiecare sursa seismica se determina pozitia, geometria si magnitudinea maxima credibila, M_{max} a acestora;
- (ii) Selectarea distantei minime sursa-amplasament, R , pentru fiecare sursa seismica identificata in pasul (i); distanta poate fi hipocentrala sau epicentrala;
- (iii) Alegerea cutremurului ce produce cea mai mare amplitudine a miscarii terenului in amplasament, Y ; aceasta amplitudine poate fi acceleratia maxima a terenului in directie orizontala (PGA), sau viteza maxima a terenului in directia orizontala (PGV), sau acceleratia spectrala pentru o perioada de vibratie definita, T ($SA(T)$), etc; amplitudinea miscarii terenului in amplasament se determina cu relatii de atenuare adecvate contextului seismo-tectonic analizat.



$$Y = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_N \end{Bmatrix}$$

Figura IV.1. Etape ale *ADHS* (adaptata dupa Kramer, 1996)

IV.3. Analiza probabilistica a hazardului seismic

Metodologia pentru efectuarea analizei probabilistice a hazardului seismic a fost introdusa de [1]. Spre deosebire de *ADHS*, *APHS* nu postuleaza producerea unui cutremur de o marime data intr-o pozitie data, ci considera posibila producerea unui cutremur de orice marime in orice pozitie (in interiorul sursei seismice).

Frecventa/rata medie anuala de depasire a amplitudinii unui parametru al miscarii seismice a terenului in amplasament se determina astfel:

- se calculeaza probabilitatea de depasire a amplitudinii unui parametru al miscarii seismice a terenului in amplasament pentru toate combinatiile de marimi si pozitii ale cutremurului;
- se calculeaz probabilitatea anuala a fiecarei combinatii prin inmultirea probabilitatii anuale de producere a unui cutremur de marime data cu probabilitatea de producere a unui cutremur intr-o pozitie data corespunzatoare combinatiei considerate;
- folosind formula probabilitatilor totale, se insumeaza, pentru toate combinatiile posibile de marimi si pozitii ale cutremurului, produsele intre probabilitatea de depasire a amplitudinii unui parametru al miscarii seismice a terenului in amplasament pentru o combinatie data si probabilitatea anuala de a se produce acea combinatie.

Analiza probabilistica a hazardului seismic se efectueaza in urmatoorii pasi, Figura IV.2 [2]:

- (i) Identificarea si caracterizarea surselor seismice ce pot afecta amplasamentul – pentru fiecare sursa seismica se determina repartitia de probabilitate a distantelor sursa-amplasament;
- (ii) Determinarea legilor de repartitie temporala a recurente cutremurelor – pentru fiecare sursa seismica se determina relatiile de recurenta ce dau ratele medii anuale de producere a cutremurelor cu o magnitudine mai mare decat o valoare specificata;
- (iii) Calculul parametrului (parametrilor) miscarii terenului in amplasament folosind relatii de atenuare; se considera ca miscarea terenului poate fi produsa de un cutremur de orice magnitudine ce poate apare in orice punct al oricarei surse seismice identificate in pasul (i); in *APHS* se iau in considerare incertitudinile din relatiile de atenuare;
- (iv) Determinarea probabilitatilor anuale de depasire a parametrului (parametrilor) miscarii terenului in amplasament folosind teorema probabilitatilor totale.

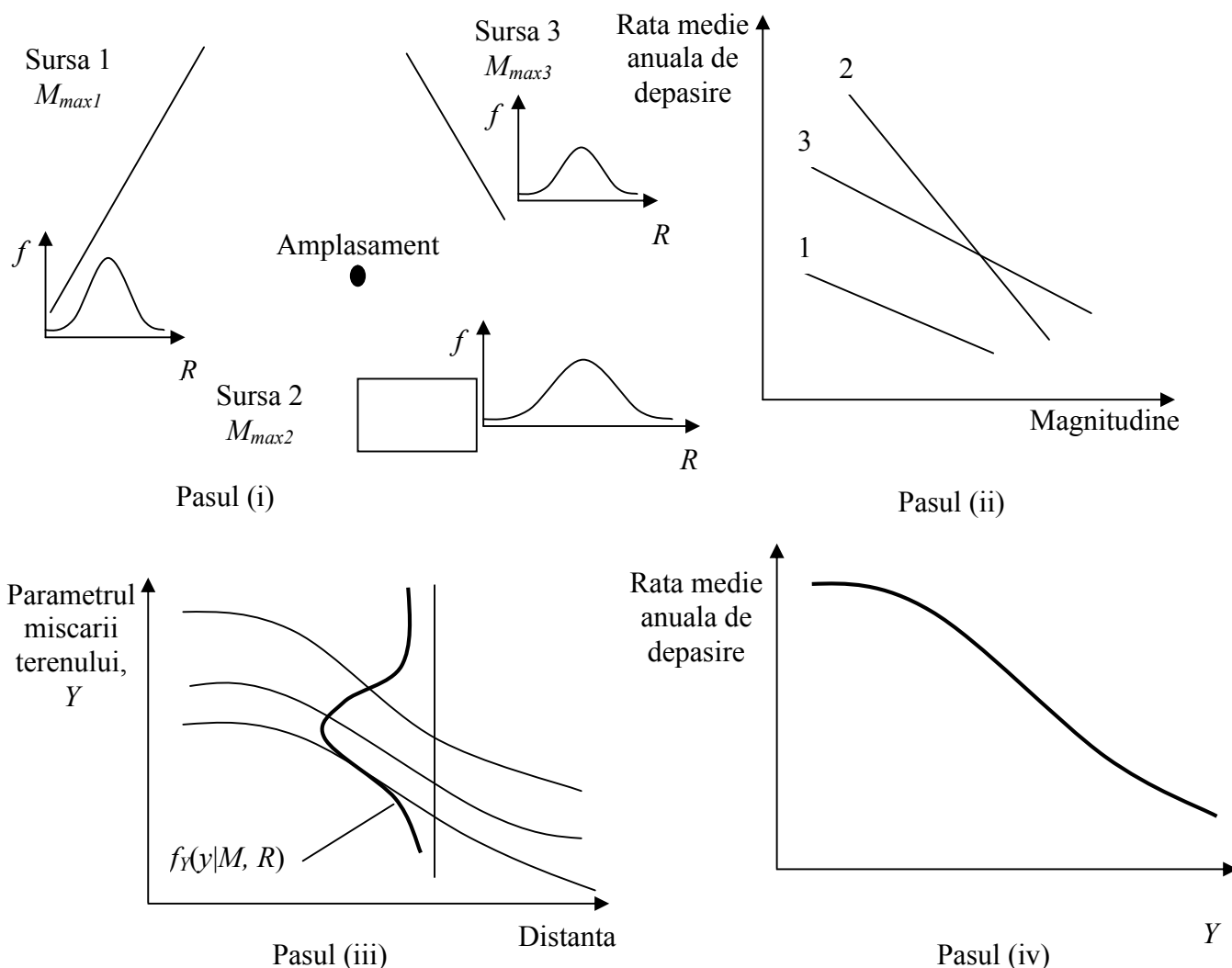


Figura IV.2. Etape ale APHS (adaptata dupa Kramer, 1996)

IV.3.1. Considerarea incertitudinilor referitoare la pozitia cutremurului

In lipsa unor date statistice relevante privind seismicitatea surselor analizate (cataloage de cutremure complete cu o intindere cel puțin de cateva sute de ani) se poate considera o distributie uniforma a hipocentrelor (focarelor) cutremurului in interiorul unei surse seismice. Distributia uniforma produce o repartitie uniforma de probabilitate a pozitiei hipocentrului in interiorul sursei seismice, dar nu produce o repartitie uniforma de probabilitate a distantelor sursa – amplasament. Astfel, in cazul in care sursa seismica este de tip liniar (falie), si se considera o repartitie uniforma de probabilitate a epicentrului cutremurului (producerea cutremurului in orice punct al faliei este echiprobabila), Figura IV.3, repartitia de probabilitate a distantelor sursa-amplasament este stabilita pe baza urmatoarei rationament [2].

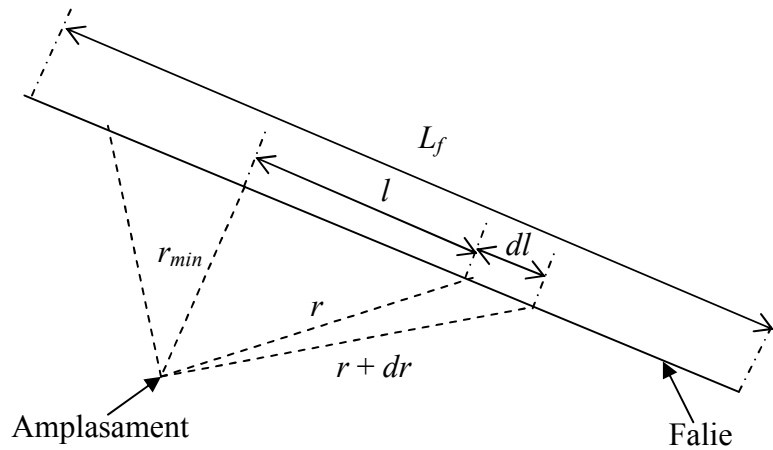


Figura IV.3. Stabilirea distantelor sursa-amplasament pentru falie

Relatia intre densitatea de repartitie a distantelor l , $f_L(l)$ si densitatea de repartitie a distantelor sursa-amplasament, r , $f_R(r)$ este [2]:

$$f_L(l)dl = f_R(r)dr \quad (IV.1).$$

Prelucrarea relatiei (IV.1) conduce la urmatorul rezultat:

$$f_R(r) = f_L(l) \cdot \frac{dl}{dr} \quad (IV.2).$$

Densitatea de repartitie uniforma a distantelor l este:

$$f_L(l) = \frac{1}{L_f} \quad (IV.3).$$

Pentru distanta l se pot scrie relatiile:

$$l = \sqrt{r^2 - r_{min}^2} \Rightarrow \frac{dl}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - r_{min}^2}} \cdot 2r = \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_{min}^2}} \quad (IV.4).$$

Folosind relatiile (IV.2)...(IV.4) se obtine densitatea de repartie a distantelor sursa-amplasament [2]:

$$f_R(r) = \frac{r}{L_f} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - r_{min}^2}} \quad (IV.5).$$

Din relatia (IV.5) se observa ca densitatea de repartitie a distantelor sursa-amplasament nu este de tip uniform.

In cazul in care sursa seismica este tridimensionala si pozitia epicentrelor evenimentelor seismice este echiprobabila, repartitia de probabilitate a distantelor sursa-amplasament se determina pe baza histogramei frecventelor distantelor de la amplasament la punctele definite pe un grid trasat pe proiectia la suprafata terenului a sursei tridimensionale, Figura IV.4.

Evaluarea ordonatelor histogramei frecventelor relative ale distantelor sursa-amplasament necesita parcurgerea urmatoarelor etape [2]:

- se imparte proiectia la suprafata terenului a zonei de sursa intr-un grid ce formeaza elemente discrete de arii egale, Figura IV.4;
- se determina valorile lui R ce corepund centrului fiecarui element al gridului;
- se calculeaza frecventele relative ale lui R si se reprezinta histograma, Figura IV.5.

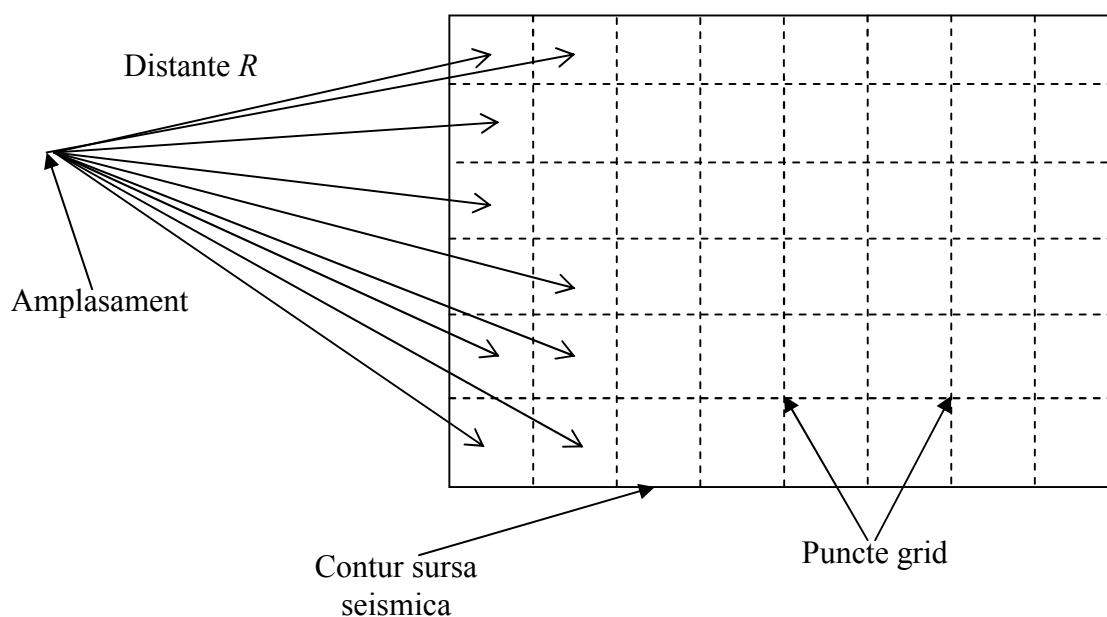


Figura IV.4. Distanțe surse amplasament pentru surse tridimensionale

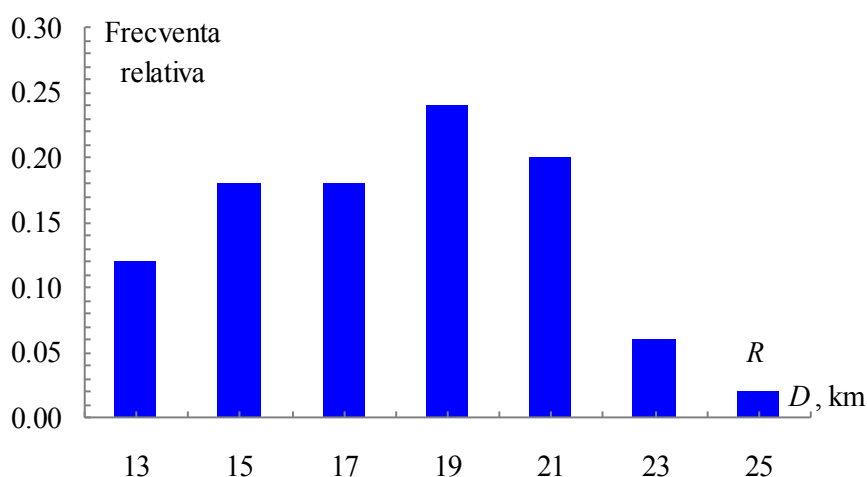


Figura IV.5. Histograma frecvențelor relative sursa-amplasament

În cazul în care există date statistice relevante privind seismicitatea surselor analizate (cataloge de cutremure complete cu o întindere cel puțin de câteva sute de ani) Folosind catalogul de cutremure din secolul XX din sursa seismică subcrustală Vrancea elaborat de

Radu [3], si considerand evenimentele cu magnitudine moment mai mare sau egala cu 6,3, se obtin histograme de frecvente relative pentru adancimea de focar, Figura IV.6, distanta epicentrala fata de Bucuresti, Figura IV.7 si distanta hipocentrala fata de Bucuresti, Figura IV.8.

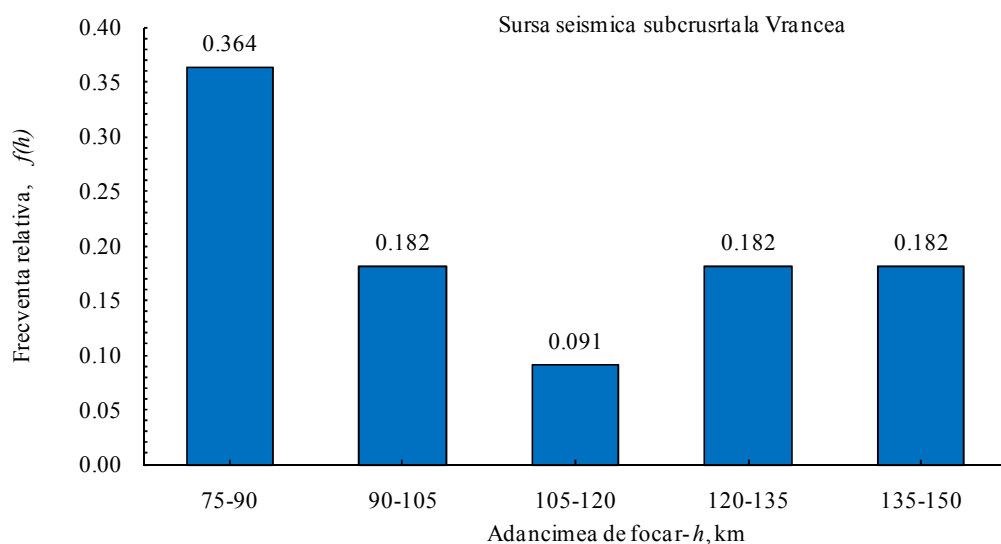


Figura IV.6. Histograma frecventelor relative a adancimilor de focar pentru sursa sesimica subcrustala Vrancea; catalog Radu, secolul XX, $M_{w,min} = 6,3$

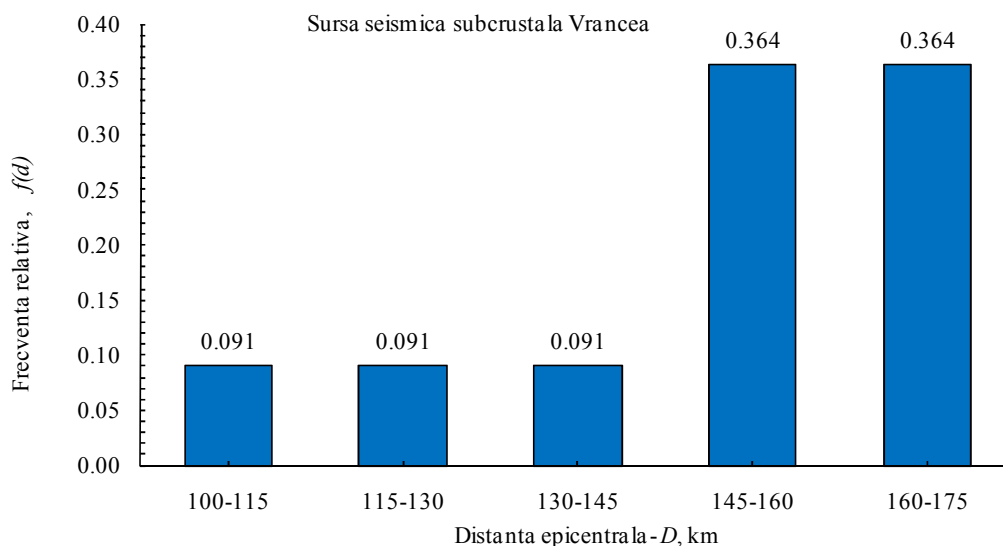


Figura IV.7. Histograma frecventelor relative a distantelor epicentrale fata de Bucuresti pentru sursa sesimica subcrustala Vrancea; catalog Radu, secolul XX, $M_{w,min} = 6,3$

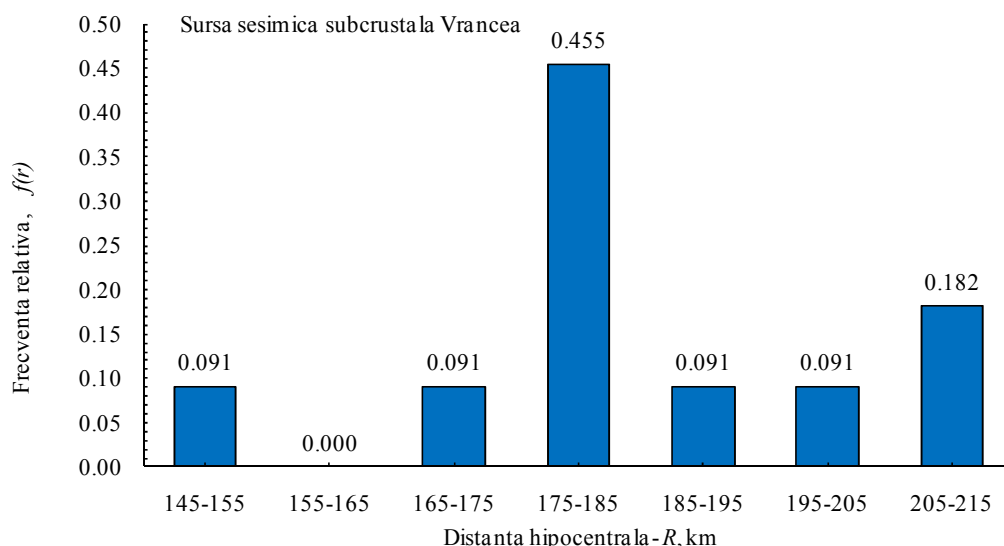


Figura IV.8. Histograma frecvențelor relative a distanțelor hypocentrale fata de Bucuresti pentru sursa sesimica subcrustala Vrancea; catalog Radu, secolul XX, $M_{w,min} = 6,3$

IV.3.2. Considerarea incertitudinilor referitoare la marimea cutremurului

Seismicitatea poate fi definita ca distributia in timp si in spatiu a cutremurelor. Distributia marimii cutremurelor intr-o perioada de timp specificata este data de legea de recurenta a magnitudinii cutremurelor. Marimea cutremurului poate fi exprimata folosind mai multe tipuri de magnitudine, dintre care se amintesc [4]:

- Magnitudine Richter, M_L , Richter, 1935 – numita si magnitudine locala; este determinata ca logaritmul zecimal al amplitudinii maxime, masurate in microni, a inregistrarii obtinute cu un seismometru Wood-Anderson, localizat la 100 km de epicentru, in teren tare; acest tip de magnitudine este folosit pentru cutremure de suprafata (adancimea focarului de cel mult 70 km) si locale (pentru care distantele intre epicentru si punctele de masurare nu depasesc 600 km);
- Magnitudinea undelor de suprafata, M_s , Gutenberg & Richter, 1936 – este determinata pe baza amplitudinii undelor Rayleigh cu perioada in jur de 20 s; acest tip de magnitudine este folosit pentru cutremure de suprafata (adancimea focarului de cel mult 70 km), relativ departate (pentru care distantele intre epicentru si punctele de masurare depasesc 1000 km), moderate catre puternice;
- Magnitudinea undelor de volum, m_B , Gutenberg, 1945 – este determinata pe baza amplitudinii primelor cicluri de unde P ce nu sunt influentate puternic de adancimea focarului; acest tip de magnitudine este folosit pentru cutremure adanci, intra-placi;
- Magnitudine moment, M_w , Hanks & Kanamori, 1977 – este determinata pe baza relatiei [4]:

$$M_w = \frac{\lg(M_0)}{1,5} - 10,7 \quad (\text{IV.6})$$

unde M_0 este momentul seismic, determinat ca produs între rezistența la rupere a materialului în lungul suprafeței (planului) de rupere, aria planului de rupere și alunecarea medie pe suprafața de rupere.

Pe măsura ce cantitatea totală de energie eliberată de cutremur crește, parametrii mișcării terenului nu cresc în egală măsură, manifestându-se fenomenul de saturare a acestora. Deoarece magnitudinile Richter, a undelor de suprafață și a undelor de volum depind de parametri ai mișcării terenului, aceste tipuri de magnitudini se saturează și ele și nu mai prezintă o măsură fiabilă a mărimii cutremurelor foarte puternice. Singurul tip de magnitudine care nu se saturează este magnitudinea moment, care nu depinde de parametri ai mișcării terenului. Magnitudinea locală, M_L se saturează în jur de valoarea 6,8, magnitudinea undelor de suprafață, M_s se saturează în jur de valoarea 8,3 și magnitudinea undelor de volum, m_B se saturează în jur de valoarea 8. De exemplu, pentru cutremurul din Chile din anul 1960, magnitudinea M_s a fost egală cu 8,3, dar magnitudinea moment a fost stabilită la valoarea de 9,5 [4].

De regulă, magnitudinea M_L se folosește pentru cutremure de suprafață cu magnitudinea cuprinsă între 3 și 7, magnitudinea m_B se folosește pentru cutremure cu magnitudinea cuprinsă între 5 și 7,5, și magnitudinea M_w se folosește pentru cutremure cu magnitudinea mai mare ca 7,5 [4].

Legea de recurență a magnitudinilor cutremurelor a fost obținută pentru prima dată de Gutenberg și Richter în anii 1940. Aceștia au organizat datele privind cutremurele din California în funcție de numărul de cutremure ce depășesc o anumită magnitudine m , N_m într-un interval de timp, t . Pe baza acestor date, Gutenberg și Richter au determinat legea de recurență a magnitudinilor, sub forma [2], [4]:

$$\lg(\lambda_m) = a - b \cdot m \quad (\text{IV.7}),$$

unde a și b coeficienți numerici ce depind de setul de date, m este magnitudinea cutremurului și $\lambda_m = N_m/t$ este rata medie anuală de depășire a magnitudinii m și este egală cu numărul de cutremure a căror magnitudine este mai mare ca m împărțit la lungimea intervalului de timp considerat în analiză. Reciproca valorii λ_m este intervalul mediu de recurență a cutremurelor ce depășesc magnitudinea m .

Legea de recurență (7) se poate scrie și în formă exponențială, după efectuarea următoarelor prelucrări [2], [4]

$$\lg(\lambda_m) = \frac{\ln(\lambda_m)}{\ln(10)} = a - b \cdot m \Rightarrow \ln(\lambda_m) = a \cdot \ln(10) - b \cdot \ln(10) \cdot m$$

de unde rezultă forma exponențială a legii de recurență [4]

$$\lambda_m = \exp(a \cdot \ln(10) - b \cdot \ln(10) \cdot m) = \exp(\alpha - \beta \cdot m) \quad (\text{IV.8}),$$

unde α și β sunt noii coeficienți ai legii de recurență. Conform relației (IV.8), repartiția de probabilitate a magnitudinilor cutremurelor este de tip exponențial.

Coeficientii a si b (sau α si β) se pot obtine prin regresie, folosind un set de date ce cuprinde seismicitatea sursei analizate. Inregistrările din setul de date (timp de origine, pozitie hipocentru, magnitudine) referitoare la evenimente seismice dependente (presocuri si replici) sunt eliminate, deoarece *APHS* evalueaza hazardul seismic provenit din eliberari discrete si independente ale energiei seismice. De asemenea, coeficientii α si β se pot obtine prin metoda verosimilitatii maxime, pe baza urmatoarelor relatii [4]:

$$\frac{1}{\beta} = \bar{m} - m_{\min} + \frac{(m_{\max} - m_{\min}) \cdot \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]} \quad (\text{IV.9})$$

si

$$\lambda_{m_{\min}} = \frac{N_{m_{\min}}}{t} = \exp(\alpha - \beta \cdot m_{\min}) \quad (\text{IV.10}),$$

unde:

$\bar{m}$ este valoarea medie a magnitudinii cutremurelor din setul de date;

$m_{\min}$ – valoarea minima (prag inferior) a magnitudinii din setul de date; este valoarea de la care setul/catalog de date se poate considera ca este complet;

$m_{\max}$ – valoarea maxima (prag superior) a magnitudinii din setul de date; este magnitudinea maxima credibila atribuita sursei seismice analizate;

$N_{m_{\min}}$ – numarul de cutremure (considerate evenimente independente) observate in timpul t cu magnitudinea $m_z \geq m_{\min}$.

Ecuatia (IV.9) se rezolva iterativ pentru valoarea β . Valoarea obtinuta se introduce in ecuatie (IV.10) care se rezolva pentru α [4].

Sensul fizic al coeficientilor a si b este urmatorul. Considerand $m = 0$ in relatia (IV.7), se obtine ca rata medie anuala a cutremurelor cu magnitudinea mai mare ca zero este 10^a , deci coeficientul a descrie seismicitatea globala a sursei seismice, Figura IV.9. Coeficientul b este panta drepte de recurenta (IV.7) si descrie posibilitatea relativa de producere a cutremurelor cu magnitudine mare versus magnitudine redusa. Daca valoarea coeficientului b creste, numarul mediu anual al cutremurelor cu magnitudine mare descreste in raport cu numarul cutremurelor cu magnitudine mica, Figura IV.9.

Rata medie anuala a cutremurelor cu magnitudinea $m > m_{\min}$ se poate exprima in functie de functia complementara de repartitie a magnitudinilor, $G_M(m)$ [4]:

$$\lambda_m = \lambda_{m_{\min}} \cdot G_M(m) \quad (\text{IV.11}).$$

Considerand $m = 0$ in relatia (IV.7), se obtine rata medie anuala a cutremurelor cu magnitudinea mai mare ca zero egala cu

$$\lambda_0 = 10^a \quad (\text{IV.12}),$$

si relatia (IV.8) se poate scrie sub forma o forma particulara a relatiei generale (IV.11) :

$$\lambda_m = \lambda_0 \cdot \exp(-\beta \cdot m) = \lambda_0 \cdot G_M(m) \quad (\text{IV.13}).$$

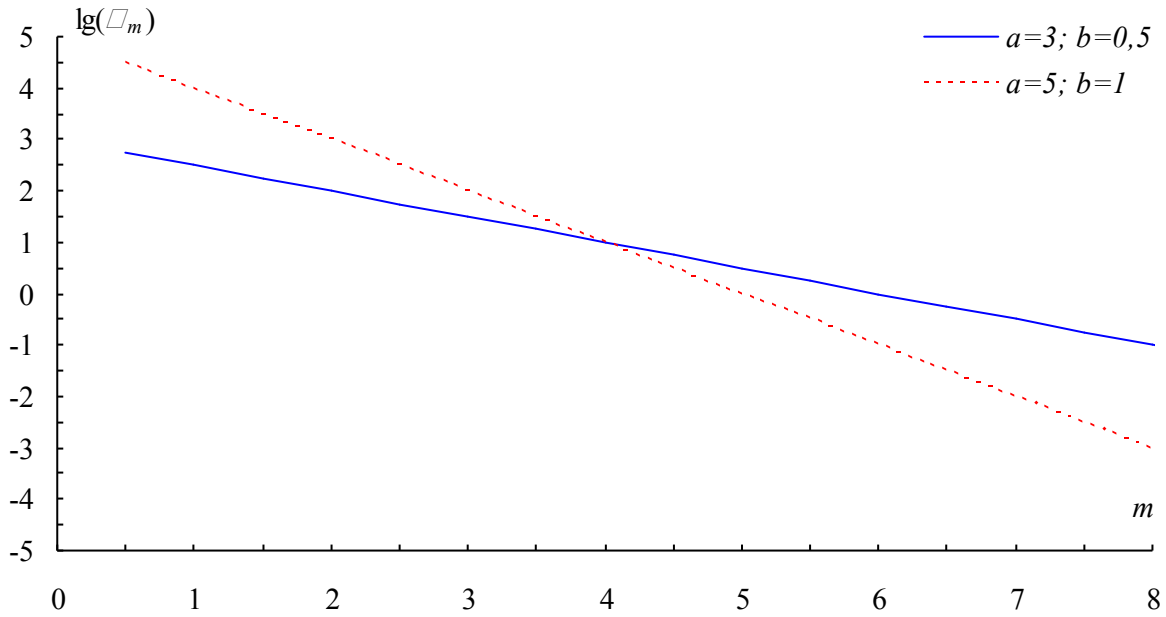


Figura IV.9. Relatia de recurenta (IV.7) reprezentata pentru doua perechi de coeficienti a si b

Daca se considera in analiza de recurenta o magnitudine prag inferior, m_{min} si se elimina din setul de date toate cutremurele cu magnitudinea $m \leq m_{min}$ se obtine legea de recurenta trunchiata inferior [4]:

$$\begin{aligned}\lambda_m &= \exp(\alpha - \beta \cdot m) = \exp(\alpha - \beta \cdot m_{min} + \beta \cdot m_{min} - \beta \cdot m) = \\ &= \exp(\alpha - \beta \cdot m_{min}) \cdot \exp(\beta \cdot m_{min} - \beta \cdot m) = \lambda_{m_{min}} \cdot \exp[-\beta \cdot (m - m_{min})]\end{aligned}\quad (IV.14).$$

Din relatiile (IV.11) si (IV.14) rezulta ca functia complementara de repartitie a magnitudinilor este:

$$G_M(m) = \exp[-\beta \cdot (m - m_{min})] \quad (IV.15).$$

Pornind de la definitia functiei complementare de repartitie a magnitudinilor

$$G_M(m) = 1 - F_M(m) \quad (IV.16),$$

functia de repartitie a magnitudinii cutremurelor cu $m > m_{min}$ este data de relatia:

$$F_M(m) = P[M \leq m | M > m_{min}] = 1 - G_M(m) = 1 - \exp[-\beta(m - m_{min})] \quad (IV.17).$$

Densitatea de repartitie a a magnitudinii cutremurelor cu $m > m_{min}$ se obtine prin derivarea functiei de repartitie (IV.17):

$$f_M(m) = \frac{dF_M(m)}{dm} = \frac{d\{1 - \exp[-\beta(m - m_{min})]\}}{dm} = \beta \cdot \exp[-\beta(m - m_{min})] \quad (IV.18).$$

Se observa ca relatia (IV.18) poate fi rescrisa sub forma:

$$f_M(m) = \beta \cdot \exp[-\beta(m - m_{min})] = \beta \cdot [1 - F_M(m)] = \beta \cdot G_M(m) \quad (IV.19).$$

Daca se considera in analiza recurentei cutremurelor o magnitudine prag superior, m_{max} (pentru a se considera in analiza magnitudinea maxima credibila a unei surse seismice sau

saturatia magnitudinilor), se obtine functia de repartitie a magnitudinilor trunchiata inferior si superior pentru $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$ [4]:

$$F_M(m) = P[M \leq m \mid m_{\min} \leq M \leq m_{\max}] = \frac{P[M \leq m \mid M > m_{\min}]}{P[M \leq m_{\max}]} = \frac{1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]} \quad (\text{IV.20}).$$

Din relatia (IV.20) se observa ca:

- $F_M(m_{\min}) = 0$;
- $F_M(m_{\max}) = 1$.

Daca se foloseste notatia $k = \frac{1}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]}$, relatia (IV.20) devine [4]:

$$F_M(m) = k \cdot \{1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})]\}, \text{ pentru } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \quad (\text{IV.21}).$$

Densitatea de repartitie a a magnitudinii cutremurelor cu $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$ se obtine prin derivarea functiei de repartitie (IV.21):

$$\begin{aligned} f_M(m) &= \frac{dF_M(m)}{dm} = \frac{k \cdot d\{1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})]\}}{dm} = \\ &= k \cdot \beta \cdot \exp[-\beta(m - m_{\min})], \text{ pentru } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \end{aligned} \quad (\text{IV.22}).$$

Functia complementara de repartitie a magnitudinilor trunchiata inferior si superior este [4]:

$$\begin{aligned} G_M(m) &= 1 - k \cdot \{1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})]\} = 1 - \frac{1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]} = \\ &= \frac{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})] - 1 + \exp[-\beta(m - m_{\min})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]} = \\ &= \frac{\exp(-\beta \cdot m) \cdot \exp(\beta \cdot m_{\min}) - \exp(-\beta \cdot m_{\max}) \cdot \exp(\beta \cdot m_{\min})}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]} = \\ &= \frac{\exp(\beta \cdot m_{\min}) \cdot [\exp(-\beta \cdot m) - \exp(-\beta \cdot m_{\max})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]} = k \cdot \exp(\beta \cdot m_{\min}) \cdot [\exp(-\beta \cdot m) - \exp(-\beta \cdot m_{\max})] = \\ &= k \cdot \exp(\beta \cdot m_{\min}) \cdot \exp(-\beta \cdot m) \cdot \{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m)]\} = \\ &= k \cdot \exp[-\beta \cdot (m - m_{\min})] \cdot \{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m)]\}, \text{ pentru } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \end{aligned} \quad (\text{IV.23}).$$

Rata medie anuala a cutremurelor cu magnitudinea $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$ se poate exprima in functie de functia complementara de repartitie a magnitudinilor [4]:

$$\begin{aligned}
\lambda_m &= \lambda_{m_{\min}} \cdot G_M(m) = \exp(\alpha - \beta \cdot m_{\min}) \cdot k \cdot \exp[-\beta \cdot (m - m_{\min})] \cdot \{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m)]\} = \\
&= \exp(\alpha - \beta \cdot m_{\min} - \beta \cdot m + \beta \cdot m_{\min}) \cdot k \cdot \{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m)]\} = \\
&= \exp(\alpha - \beta \cdot m) \cdot k \cdot \{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m)]\} = \exp(\alpha - \beta \cdot m) \cdot \frac{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m)]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]}
\end{aligned} \tag{IV.24}.$$

Sintetizand relatiile determinate anterior se obtin urmatoarele modele de calcul pentru:

- densitatea de repartitie a magnitudinilor cutremurului, Figura IV.10

$$f_M(m) = \begin{cases} \beta \cdot \exp(-\beta \cdot m), & \text{pentru } \forall m \\ \beta \cdot \exp[-\beta(m - m_{\min})], & \text{pentru } m \geq m_{\min} \\ k \cdot \beta \cdot \exp[-\beta(m - m_{\min})], & \text{pentru } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \end{cases} \tag{IV.25};$$

- functia de repartitie a magnitudinilor cutremurului, Figura IV.11

$$F_M(m) = \begin{cases} 1 - \exp(-\beta \cdot m), & \text{pentru } \forall m \\ 1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})], & \text{pentru } m \geq m_{\min} \\ k \cdot \{1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})]\}, & \text{pentru } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \end{cases} \tag{IV.26};$$

- functia complementara de repartitie a magnitudinilor cutremurului, Figura IV.12

$$G_M(m) = \begin{cases} \exp(-\beta \cdot m), & \text{pentru } \forall m \\ \exp[-\beta(m - m_{\min})], & \text{pentru } m \geq m_{\min} \\ k \cdot \exp[-\beta \cdot (m - m_{\min})] \cdot \{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m)]\}, & \text{pentru } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \end{cases} \tag{IV.27};$$

- rata medie anuala a magnitudinilor cutremurului, Figura IV.13

$$\lambda_m = \begin{cases} \lambda_0 \cdot \exp(-\beta \cdot m), & \text{pentru } \forall m \\ \lambda_{m_{\min}} \cdot \exp[-\beta(m - m_{\min})], & \text{pentru } m \geq m_{\min} \\ \lambda_{m_{\min}} \cdot k \cdot \exp[-\beta \cdot (m - m_{\min})] \cdot \{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m)]\}, & \text{pentru } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \end{cases} \tag{IV.28}.$$

Folosind relatia (IV.28) se determina intervalul mediu de recurenta a unei valori de magnitudine mai mare ca m , Figura IV.14:

$$IMR(> m) = \frac{1}{\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_{m_{\min}} \cdot G_M(m)} = \frac{1}{\lambda_{m_{\min}} \cdot [1 - F_M(m)]} \quad (IV.29).$$

Figurile IV.10...IV.14 sunt obtinute pentru valorile $\alpha=7,200$ si $\beta=1,411$, valori determinate prin metoda verosimilitatii maxime pe baza Catalogului ROMPLUS continand evenimentele seismice din secolul XIX si XX generate de sursa seismica subcrustala Vrancea. Magnitudinea minima considerata in analiza este $M_{w,min} = 5,3$ si magnitudinea maxima este $M_{w,max} = 8,1$. Cele trei reprezentari, *I*, *II* si *III* corespund celor trei cazuri de intervale de magnitudine, in ordinea considerata in relatiile (IV.25)...(IV.28). In Figura IV.13 sunt reprezentate si ratele medii anuale ale magnitudinilor observate in secolele XIX si XX.

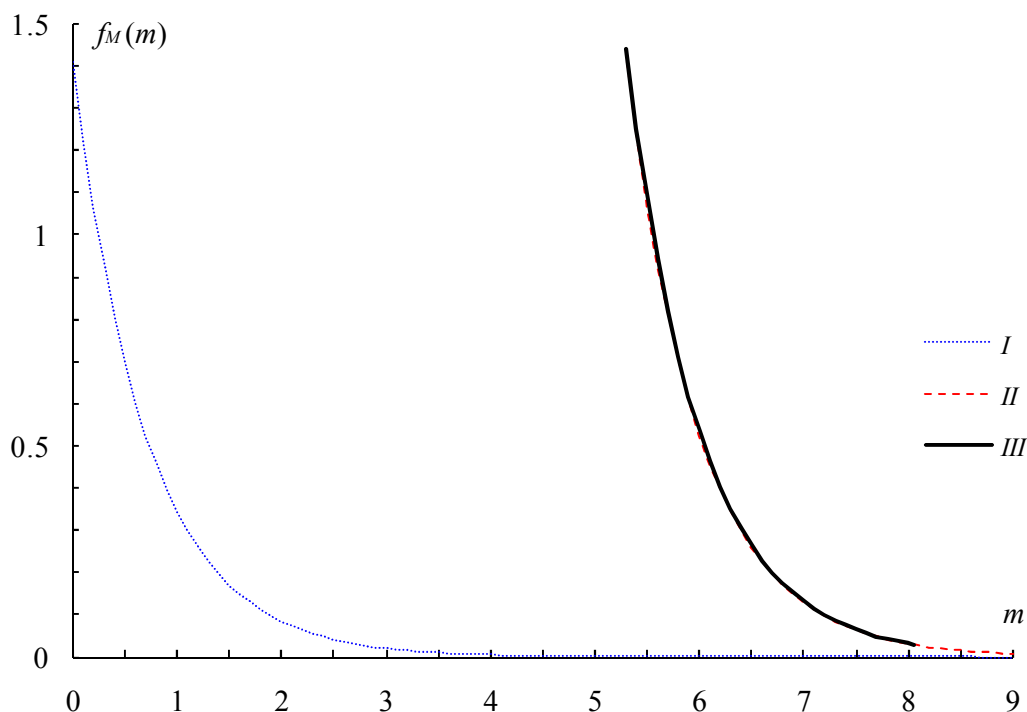


Figura IV.10. Densitatea de repartitie a magnitudinilor cutremurului

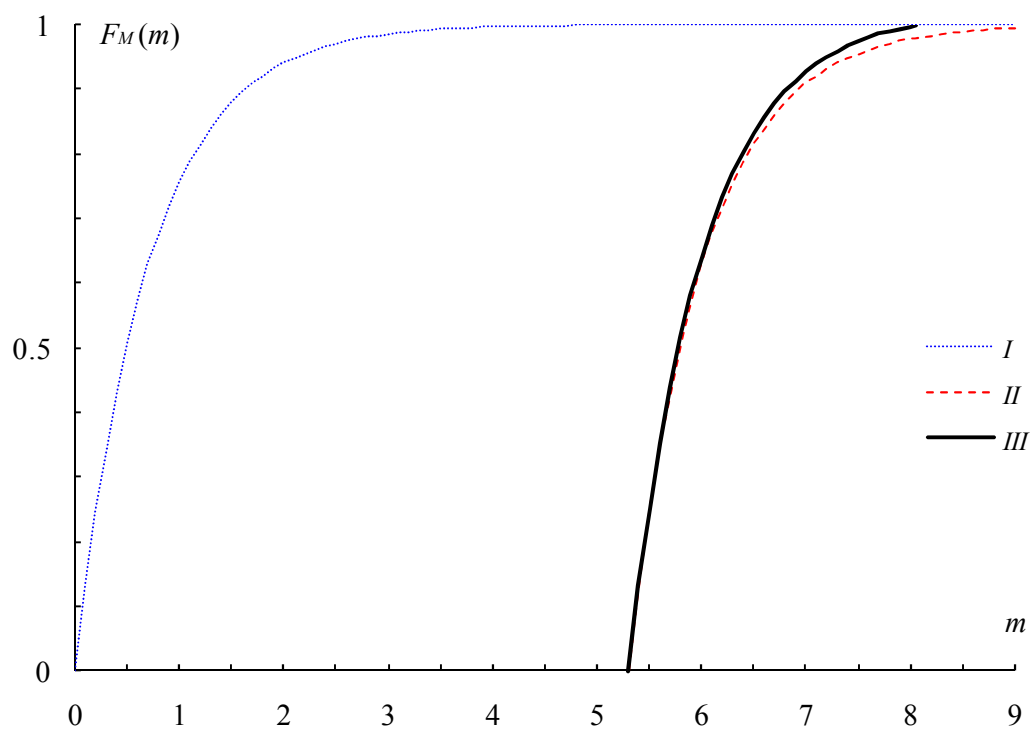


Figura IV.11. Functia de repartitie a magnitudinilor cutremurului

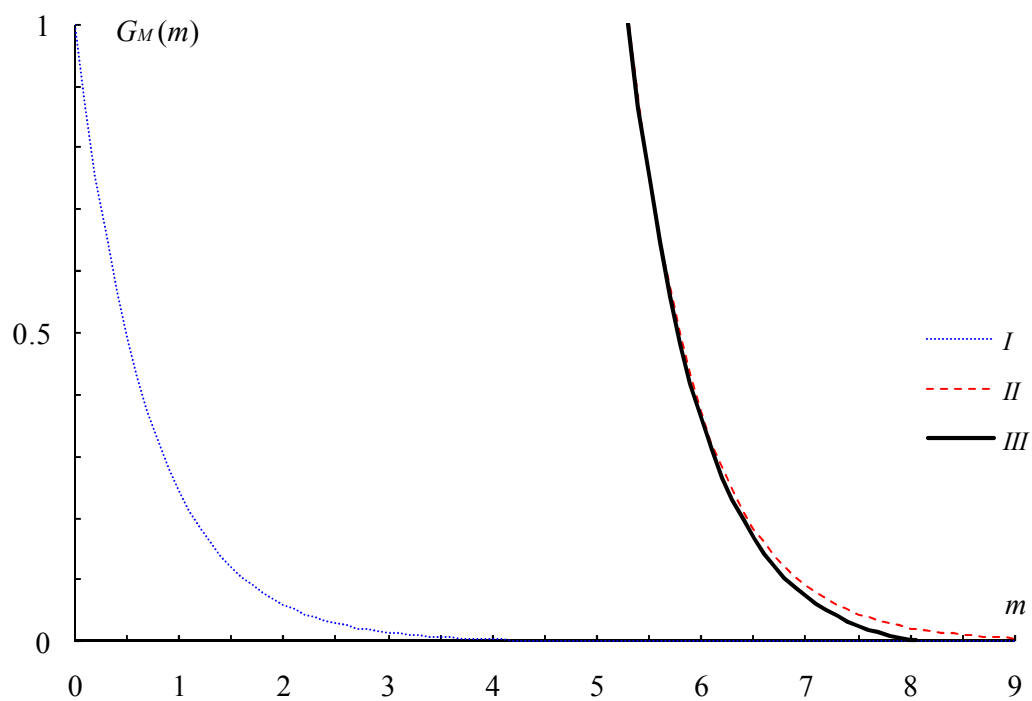


Figura IV.12. Functia complementara de repartitie a magnitudinilor cutremurului

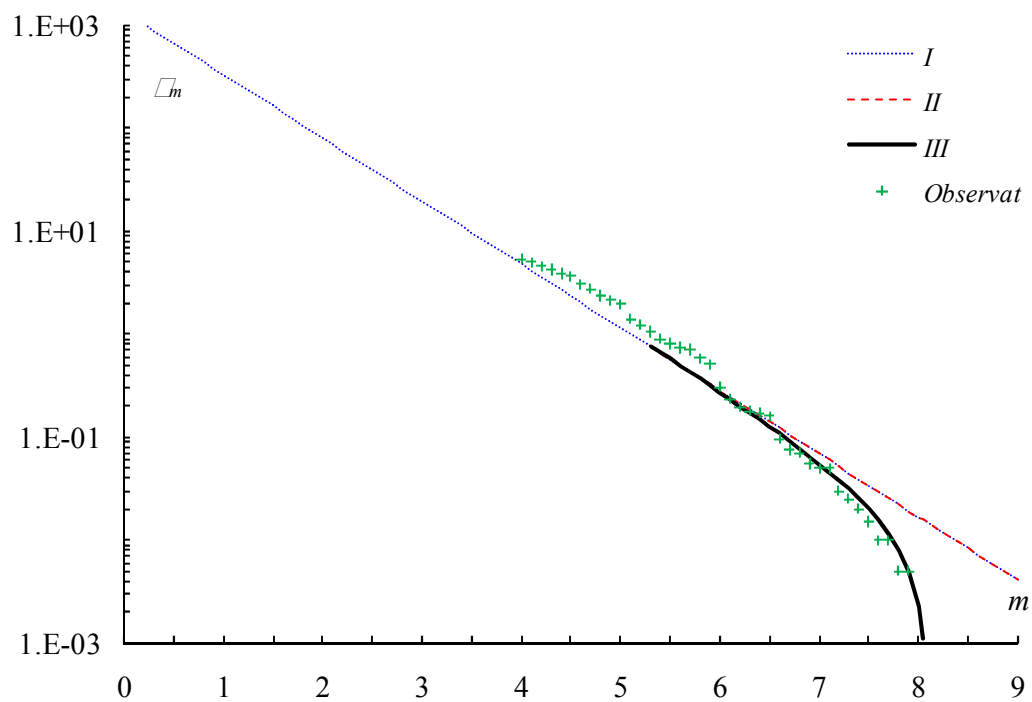


Figura IV.13. Rata medie anuală a magnitudinilor cutremurului

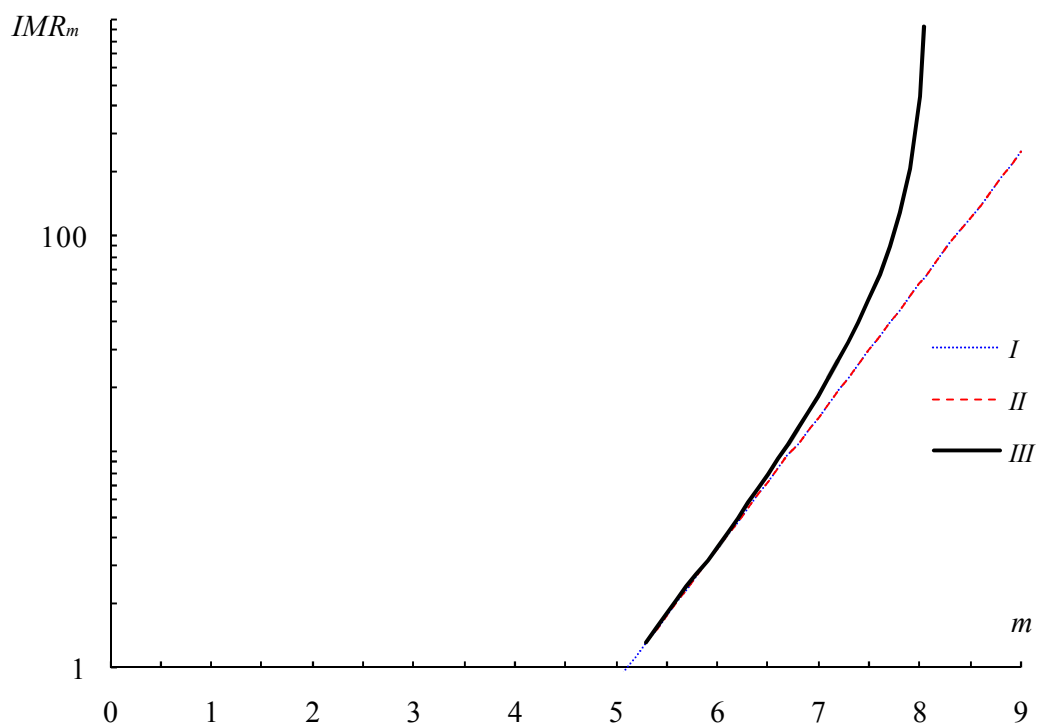


Figura IV.14. Intervalul mediu de recurență a magnitudinilor cutremurului

IV.3.3. Considerarea incertitudinilor in relatiile de atenuare

Coeficientii ce calibreaza relatiile de atenuare (sau de predictie) se determina prin analiza de regresie neliniara efectuata prin metoda celor mai mici patrate folosind un set de inregistrari ale unui parametru al miscarii terenului. Incertitudinile din relatia de atenuare sunt incorporate in *APHS* prin intermediul abaterii standard a logaritmului parametrului analizat.

Probabilitatea ca amplitudinea parametrului Y al miscarii seismice a terenului intr-un amplasament sa depaseasca o valoare y^* conditionata de producerea unui cutremur de magnitudine m la distanta r de amplasamentul analizat este data de relatia [4]:

$$P[Y > y^* | m, r] = 1 - P[Y \leq y^* | m, r] = 1 - F_{Y|M,R}(y^*) \quad (IV.30).$$

Funcția de repartitie $F_{Y|M,R}(y^*)$ este considerata, de obicei, de tip lognormal.

Daca se considera ca parametrul miscarii seismice a terenului este acceleratia de varf a terenului in directie orizontala, $Y = PGA$, magnitudinea cutremurului este $m = M_w$, distanta r este distanta hipocentrala, R si adancimea de focar este h , un exemplu de relatie de atenuare pentru miscari seismice generate de cutremurele subcrustale este cea propusa de Mollas si Yamazaki si care este de forma [5]:

$$\ln(PGA) = c_0 + c_1 \cdot M_w + c_2 \cdot \ln(R) + c_3 \cdot R + c_4 \cdot h + \varepsilon \quad (IV.31).$$

In relatia (IV.31) M_w este magnitudinea moment (magnitudinea m din relatia IV.30), R este distanta hipocentrala (distanța r din relatia IV.30), $c_0...c_4$ sunt coeficienti determinati prin regresie neliniara multiparametrica, ε este o variabila aleatoare avand media $m_\varepsilon = 0$ si abaterea standard $\sigma_\varepsilon = \sigma_{\ln(PGA)}$. Daca in relatia (IV.31) se foloseste valoarea medie a lui ε , se obtine valoarea medie a logaritmului natural al PGA , $m_{\ln(PGA)}$, Figura IV.15. Deoarece media logaritmului unei variabile aleatoare este egala cu logaritmul medianei variabilei, prin delogaritmarea se obtine mediana valorii PGA :

$$m_{\ln(PGA)} = \ln(PGA_{0,50}) \Rightarrow PGA_{0,50} = \exp(m_{\ln(PGA)}) \quad (IV.32).$$

Daca pentru un set de valori M_w , R si h se determina cu relatia (IV.31) perechea de valori $m_{\ln(PGA)} = \xi$ si $\sigma_{\ln(PGA)} = \theta$, folosind repartitia lognormala se calculeaza probabilitatea de nedepasire a unei valori y^* (unde parametrul miscarii terenului Y este PGA), Figura IV.15 [2]:

$$F_{Y|M,R}(y^*) = \int_0^{y^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{y^*} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y^*) - \xi}{\theta}\right)^2\right] dy \quad (IV.33).$$

Relatiile (IV.31 si IV.33) arata ca acceleratia maxima a terenului in directie orizontala pe un amplasament dat este o variabila aleatoare ce are o repartitie de probabilitate de tip lognormal. In Figura IV.15 sunt reprezentate retrodictii ale valorilor medii si mediane ale acceleratiei maxime a terenului pentru evenimentul seismic subcrustal din Vrancea de la 4 martie 1977 si functia de repartitie a acceleratiei maxime a terenului in municipiul Iasi pentru acelasi eveniment seismic. In Figura IV.16 sunt reprezentate retrodictii ale valorilor medii si mediane ale acceleratiei maxime a terenului pentru evenimentul seismic subcrustal din Vrancea de la

31 august 1986, valorile medii, mediane si medii plus o abatere standard si functia de repartitie a acceleratiei maxime a terenului pe un amplasament situat la 100 km de epicentru pentru acelasi eveniment seismic.

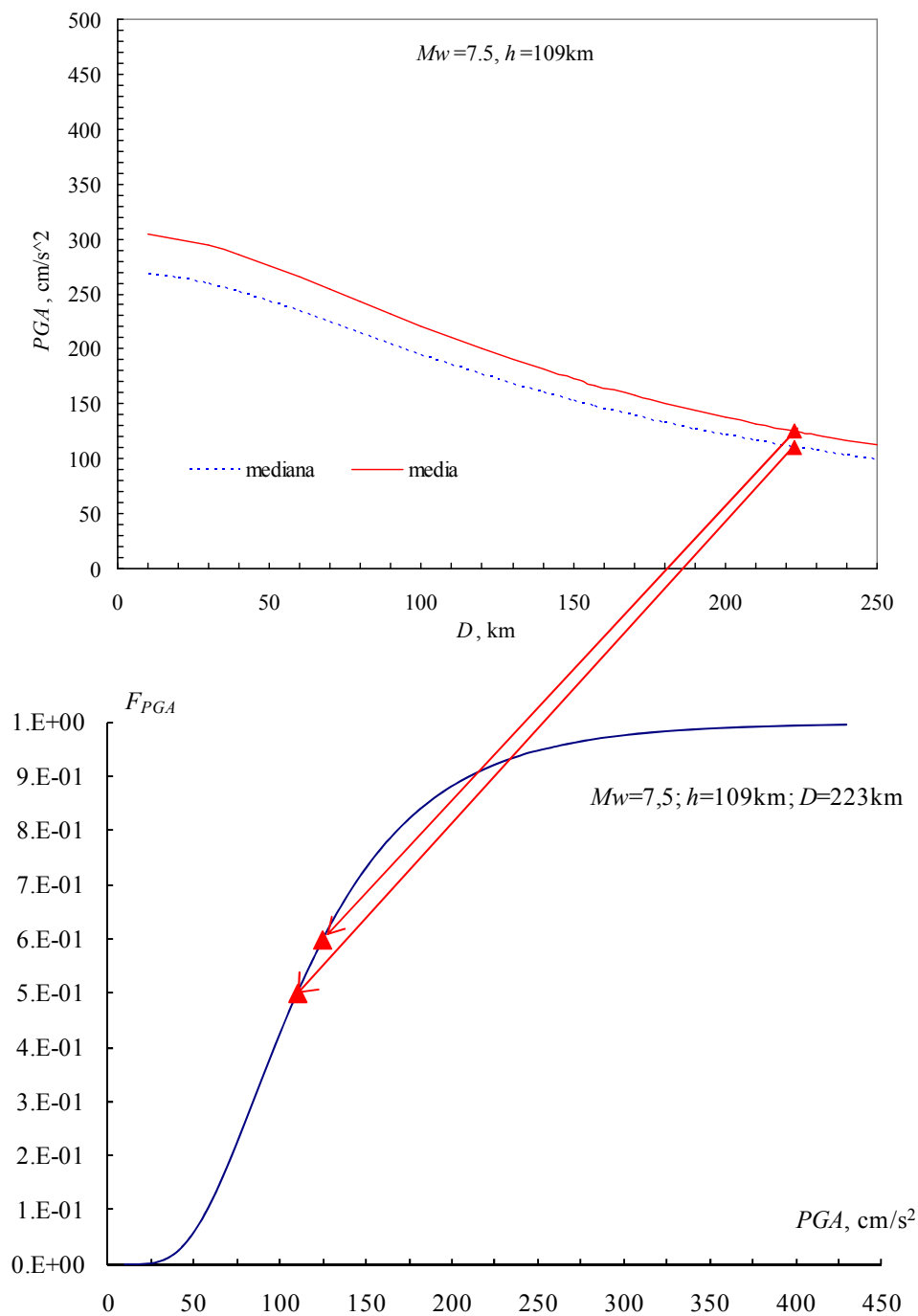


Figura IV.15. Exemplu de relatie de atenuare si de functie de repartitie a PGA pentru cutremurul subcrustal vrancean de la 4 martie 1977

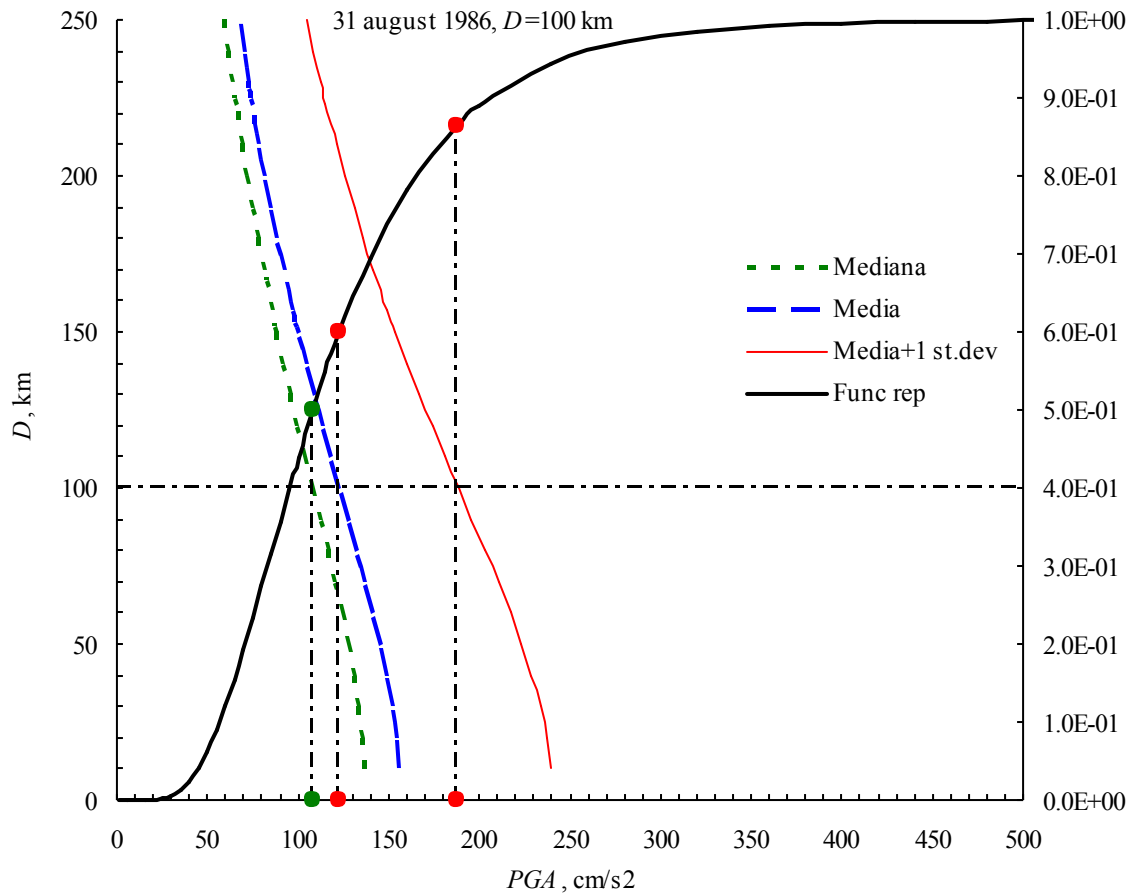


Figura IV.16. Exemplu de relatie de atenuare si de functie de repartitie a PGA pentru cutremurul subcrustal vrancean de la 31 august 1986

Valoarea medie a acceleratiei maxime a terenului in directie orizontala se obtine folosind urmatoarele proprietati ale repartitiei lognormale:

$$m_{\ln(PGA)} = \ln(PGA_{0,50}) = \ln \frac{m_{PGA}}{\sqrt{1 + V_{PGA}^2}} \quad (IV.34);$$

$$\sigma_{\ln(PGA)} = \sqrt{\ln(1 + V_{PGA}^2)} \Rightarrow \exp(\sigma_{\ln(PGA)}^2) = 1 + V_{PGA}^2 \quad (IV.35);$$

$$m_{PGA} = PGA_{0,50} \cdot \sqrt{1 + V_{PGA}^2} = PGA_{0,50} \cdot \sqrt{\exp(\sigma_{\ln(PGA)}^2)} \quad (IV.36).$$

IV.3.4. Determinarea curbelor de hazard seismic pe amplasament

Hazardul seismic pe un amplasament pentru un parametru Y al miscarii terenului este definit ca frecventa (rata) medie λ cu care este depasita o valoare specificata, y^* , in timpul t (de obicei, $t = 1$ an).

Rezultatul unei *APHS* este curba de hazard seismic pe un amplasament; aceasta exprima frecventa/rata medie anuala de depasire a diferitelor valori ale parametrului miscarii terenului selectat in analiza.

Conceptul de baza al calculelor provine din formula probabilitatilor totale [1]

$$P[A] = \sum_{i=1}^n P[A | H_i] \cdot P[H_i] \quad (IV.37),$$

unde $H_i, i = 1, \dots, n$ formeaza o multime exhaustiva (completa) de evenimente disjuncte.

Probabilitatea de depasire a unei valori particulare y^* a unui parametru selectat Y este calculata cu relatia (IV.30) pentru un cutremur de magnitudine m ce se produce la distanta r de amplasament; aceasta probabilitate data de relatia (IV.30) este multiplicata cu probabilitatea anuala ca magnitudinea cutremurului sa fie m si cu probabilitatea ca distanta sursa-amplasament este r ; calculul se repeta pentru toate magnitudinile si toate distantele posibile, in final insumandu-se toate produsele probabilitatilor individuale. Relatia de calcul pentru determinarea probabilitatii anuale de depasire a unei valori particulare y^* a unui parametru ce descrie miscarea seismica a terenului in amplasament este [1]

$$P[Y > y^*] = P[Y > y^* | \mathbf{X}] \cdot P[\mathbf{X}] = \int \int \dots \int P[Y > y^* | \mathbf{X}] \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (IV.38),$$

unde $\mathbf{X}$ este un vector de variabile aleatoare ce influenteaza valorile variabilei Y (de obicei magnitudinea si distanta). Daca se considera magnitudinea M si distanta sursa-amplasament R variabile aleatoare independente, densitatea de repartitie bivariata $f_{MR}(m, r)$ este exprimata ca produs al densitatilor de repartitie univariate ale variabilelor independente; in acest caz, relatia (IV.38) ia forma particulara [1]

$$P[Y > y^*] = \int \int P[Y > y^* | m, r] \cdot f_M(m) \cdot f_R(r) dm dr \quad (IV.39),$$

unde $P[Y > y^* | m, r]$ se obtine din relatia:

$$P[Y > y^* | m, r] = 1 - F_{Y|M,R}(y^*) \quad (IV.40).$$

Funcția de repartitie din relatia (IV.40) se determina cu relatia (IV.33). Rata medie anuala de depasire a valorii y^* este [2]:

$$\lambda_{y^*} = \lambda_{m_{\min}} \cdot P[Y > y^*] = \lambda_{m_{\min}} \cdot \int \int P[Y > y^* | m, r] \cdot f_M(m) \cdot f_R(r) dm dr \quad (IV.41).$$

Relatia (IV.41) exprima matematic expresia generala care arata ca rata efectelor este egala cu rata cauzelor inmultita cu probabilitatea efectelor. Curba de hazard seismic incorporeaza efectul incertitudinilor aleatoare in repartitia magnitudinii si a locatiei cutremurului, precum si in predictia valorilor parametrului miscarii terenului pe amplasament pentru un cutremur dat.

Pentru integrarea numerica a relatiei (IV.41) se considera N_m segmente de magnitudine si N_r segmente de distante, Figura IV.17; relatia (IV.41) devine [2]:

$$\lambda_{y^*} = \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_r} \lambda_{m_{\min}} \cdot P[Y > y^* | m_j, r_k] \cdot P[M = m_j] \cdot P[R = r_k] \quad (IV.42).$$

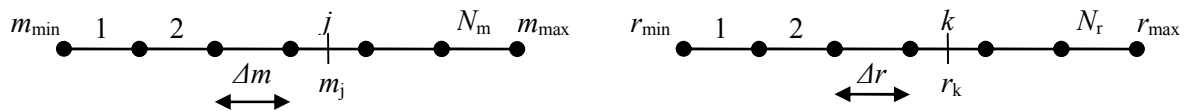


Figura IV.17. Cuantificarea magnitudinilor si a distantelor pentru integrarea numerica a relatiei (IV.41)

Probabilitatile din relatie (IV.42) se determina folosind urmatoarele relatii [2]:

$$\begin{cases} \Delta m = \frac{m_{\max} - m_{\min}}{N_m} \\ \Delta r = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{N_r} \end{cases} \quad (\text{IV.43});$$

$$\begin{cases} m_j = m_{\min} + (j - 0,5) \cdot \Delta m \\ r_k = r_{\min} + (k - 0,5) \cdot \Delta r \end{cases} \quad (\text{IV.44});$$

$$\begin{cases} P[M = m_j] = f_M(m_j) \cdot \Delta m \\ P[R = r_k] = f_R(r_k) \cdot \Delta r \end{cases} \quad (\text{IV.45}).$$

Inlocuind relatia (IV.45) in relatia (IV.42) se obtine forma finala pentru integrarea numerica a relatiei (IV.41) [2]:

$$\lambda_{y^*} = \lambda_{m_{\min}} \cdot \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_r} P[Y > y^* | m_j, r_k] \cdot f_M(m_j) \cdot f_R(r_k) \cdot \Delta m \cdot \Delta r \quad (\text{IV.46}).$$

In Figura IV.18 este dat un exemplu de curba de hazard seismic determinata cu relatia (IV.46) pentru municipiul Iasi [6].

Daca exista mai multe surse seismice ce pot afecta amplasamentul analizat, se determina ratele medii anuale de depasire a valorii y^* pentru toate cele N_s surse seismice, λ_{yi^*} ($i=1, \dots, N_s$) si se insumeaza ratele individuale [2]:

$$\lambda_{y^*} = \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_{yi^*} \quad (\text{IV.47}).$$

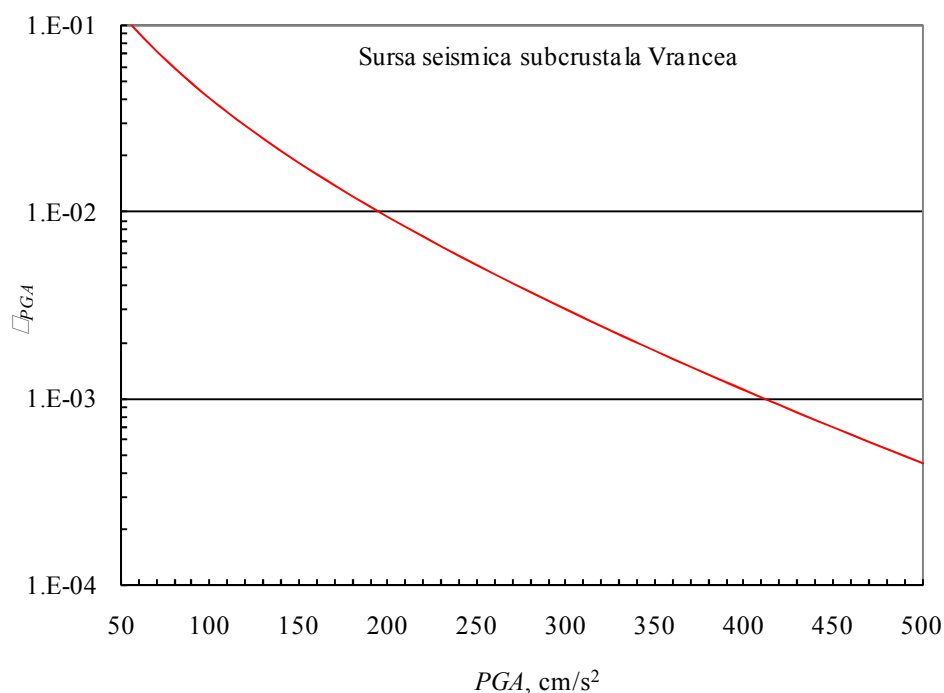


Figura IV.18. Curba de hazard seismic pentru municipiul Iasi

In Figura IV.19 sunt prezentate curbele de hazard seismic corespunzatoare unor modele alternative de analiza a seismicitatii sursei subcrustale Vrancea, precum si curba medie de hazard seismic folosind verosimilitati relative pentru fiecare model de analiza a seismicitatii. Rezultatele din Figura IV.19 se refera la municipiul Iasi [6].

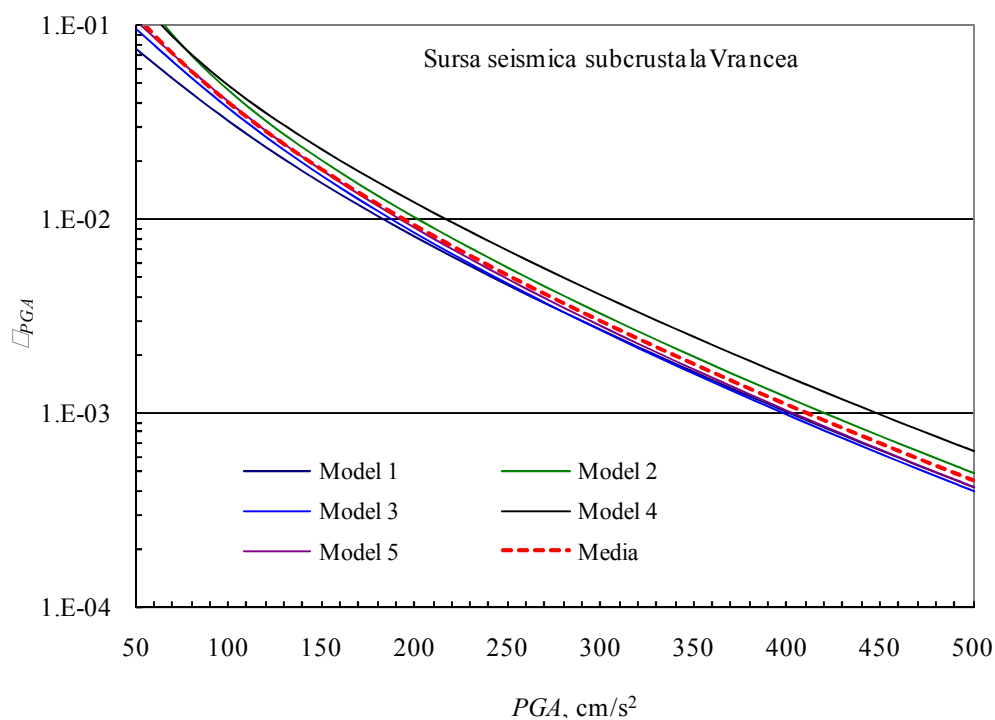


Figura IV.19. Curbe de hazard seismic corespunzatoare unor modele alternative de analiza a seismicitatii sursei subcrustale Vrancea; curba medie de hazard seismic pentru municipiul Iasi

Pentru a incorpora in *APHS* si efectul incertitudinilor epistemice, se foloseste metoda arborilor de evenimente (arbori logici) [4]. Aceasta metoda implica utilizarea de modele alternative pentru determinarea valorilor intermediare folosite in *APHS*. De exemplu, se pot folosi mai multe relatii de atenuare, mai multe magnitudini prag inferior si/sau superior, mai multe legi de recurenta (nelimitate, trunchiate inferior si/sau superior), toate acestea reflectand limitele cunoasterii fenomenului analizat. Fiecare combinatie completa de modele alternative va conduce, in final, la o evaluare a ratei medii anuale de depasire a unor valori particulare ale parametrului miscarii terenului, Y . Metoda implica si stabilirea de ponderi pentru fiecare combinatie completa de modele alternative; ponderile sunt interpretate ca verosimilitati (sau grade de incredere) relative asupra corectitudinii modelelor. Suma ponderilor tuturor ramurilor ce converg intr-un nod trebuie sa fie egala cu 1. *APHS* se efectueaza pentru toate combinatiile asociate cu ramurile finale ale arborelui; rezultatele analizelor individuale se pondereaza cu verosimilitatea relativa a ramurii si, in final, se insumeaza rezultatele individuale ponderate. Un exemplu de arbore logic este dat in Figura IV.20.

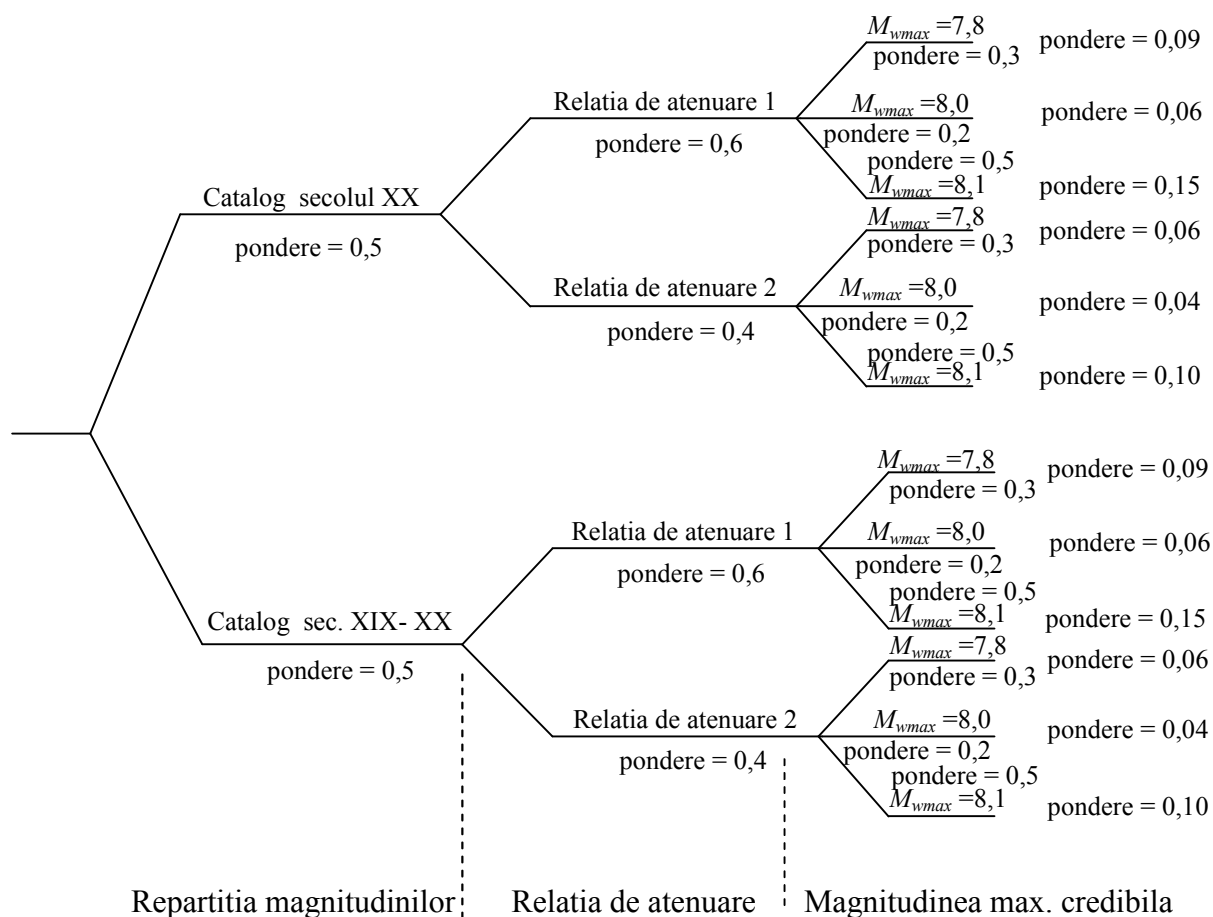


Figura IV.20. Exemplu de arbore logic

Bibliografie

1. Cornell, C. A., 1968. *Engineering Seismic Risk Analysis*. Bull.Seis.Soc.Am, Vol.58, p.1583-1606
2. Kramer, L. S., *Geotechnical Earthquake Engineering*, Prentice Hall, 1996
3. Lungu, D., Văcăreanu, R., Aldea, A., Arion, C., *Advanced Structural Analysis*, Conspress, 2000
4. McGuire, R. K., *Seismic Hazard and Risk Analysis*, EERI, MNO-10, 2004
5. Molas, G., Yamazaki, F., 1995. *Attenuation of Earthquake Ground Motion in Japan including deep focus events*. Bull.Seis.Soc.Am., Vol.85, No.5, p.1343-1358
6. Văcăreanu, R., Lungu, D., Aldea, A., Arion, C., *Probabilistic Seismic Hazard Assessment for Iasi City in Romania*, A 4-a Conferinta Nationala de Inginerie Seismica, Conspress, 2009, p. 173-182